

Model suku bunga jangka pendek berbasis grup Lie matriks heisenberg berdimensi lima

Edi Kurniadi^{1*}, Badrulfalah²

^{1*,2)} Matematika, Universitas Padjadjaran, Indonesia

* E-mail corresponding author : edi.kurniadi@unpad.ac.id

Submitted: 29 Juni 2025, Accepted: 16 Juli 2026, Published: 23 Juli 2026

Abstrak: Teori Lie dapat diterapkan dalam berbagai bidang ilmu seperti matematika keuangan. Menggunakan persamaan diferensial stokastik melalui gerak Brown, suatu ruang keadaan dinamik dapat ditentukan. Penelitian ini bertujuan untuk mengkonstruksi model suku bunga menggunakan grup matriks Heisenberg $\mathbb{H}_2$ berdimensi lima. Sifat ini memberikan dua pasang interaksi konjugat yang terikat pada satu pusat berdasarkan pada *bracket* Lie-nya. Di model terdahulu, interaksinya sangat linear dan terbatas. Di model dimensi 5, suku bunga jangka pendek bisa memodelkan interaksi silang (*cross-coupling*) yang rumit seperti guncangan pasar (*market shocks*) yang memengaruhi ekspektasi inflasi, yang pada gilirannya menekan suku bunga jangka pendek secara non-linear. Dalam penelitian ini dibuktikan bahwa ruang keadaan dinamik yang diperoleh melalui grup matriks Heisenberg berdimensi lima mempunyai bentuk umum $dX = X\psi d\theta + X(\gamma_1 X_1 dw_1 + \gamma_2 X_2 dw_2 + \gamma_3 X_3 dw_3 + \gamma_4 X_4 dw_4 + \gamma_5 X_5 dw_5)$ di mana $X \in \mathbb{H}_2, \psi \in \text{Lie}(\mathbb{H}_2) = \langle X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \rangle$ dan dw_i adalah proses Wiener independen. Lebih jauh, model suku bunga dr juga diperoleh dalam bentuk umum $dr = (\gamma_1 + \gamma_2 r)d\theta + \gamma_3 r dw$ di mana $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ adalah konstanta. Untuk penelitian selanjutnya, suku bunga yang dikonstruksi melalui grup matriks Heisenberg berdimensi $2n + 1$ masih terbuka untuk dikaji.

Kata kunci: Grup Lie Heisenberg; Matriks; Persamaan Diferensial Stokastik; Persamaan Dinamik; Suku Bunga

Abstract: The Lie theory can be applied in many fields including in mathematical finance. Using stochastic differential equation through Brownian motion, a state space dynamic can be considered. The research aims to construct a short rate model using the Heisenberg matrix group $\mathbb{H}_2$ of dimension five. In a 5-dimensional model, short-term interest rates can model complex cross-couplings, such as market shocks that affect inflation expectations, which in turn exert a nonlinear downward pressure on short-term interest rates. It is shown that the state space dynamic which is constructed by five-dimensional Heisenberg matrix group H_2 is of the form $dX = X\psi d\theta + X(\gamma_1 X_1 dw_1 + \gamma_2 X_2 dw_2 + \gamma_3 X_3 dw_3 + \gamma_4 X_4 dw_4 + \gamma_5 X_5 dw_5)$ where $X \in \mathbb{H}_2, \psi \in \text{Lie}(\mathbb{H}_2) = \langle X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \rangle$ and dw_i are independent Wiener processes. Moreover, the short rate model dr is also obtained in the form $dr = (\gamma_1 + \gamma_2 r)d\theta + \gamma_3 r dw$ where $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ are constants. For future research, short rate models constructed through $2n + 1$ dimensional heisenberg matrix group are still open problems.

Keywords: Dynamic Equation; Heisenberg Lie group; Matriks; Short rate model; Stochastic differential equation.

How to Cite:

Kurniadi, E., & Badrulfalah. (2026). Model suku bunga jangka pendek berbasis grup lie matriks heisenberg berdimensi lima. Delta-Pi: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika, 14(2), 185-192. <https://doi.org/10.33387/dpi.v14i2.10246>

This is an open access  article under the CC-BY license CC BY 4.0



A. Pendahuluan

Model suku bunga baik suku bunga jangka pendek maupun suku bunga jangka panjang memainkan peran penting dalam perekonomian suatu negara misalnya dalam penetapan harga obligasi atau *bound pricing*, penetapan derivatif bunga, dan kebijakan moneter. Model-model suku bunga yang banyak digunakan dalam perekonomian suatu negara masih berupa model standar seperti Vasicek, CIR, atau Hull-White. Model-model suku bunga tersebut masih diasumsikan sebagai proses stokastik standar tanpa mempertimbangkan struktur geometri dan faktor risiko. Namun, riset terkini menunjukkan bahwa memasukkan struktur non-linier melalui grup Lie matriks seperti grup Lie matriks Heisenberg dan grup spesial ortogonal dianggap dapat menangkap dinamika yang lebih kompleks dan realistis dalam evolusi suku bunga.

Model-model suku bunga yang berdasarkan grup Lie matriks lebih mempertimbangkan faktor-faktor geometri yang mampu mengatasi kompleksitas atau risiko gagal bayar. Selain itu, model suku berdasarkan grup Lie matriks lebih adaptif terhadap waktu pengembalian pinjaman. Hal yang tidak kalah pentingnya adalah suku bunga berbasis grup Lie matriks mampu menangkap dinamika yang lebih kompleks dan realistis dalam evolusi suku bunga (Kaibe & O'Hara, 2019; Luo et al., 2012; Sinkala et al., 2008).

Kajian terkait model suku bunga berbasis grup Lie matriks sudah ada yang meneliti hanya jumlahnya masih sedikit dan masih berbasis grup Lie umum (Park et al., 2011). Penelitian tersebut sebagian besar terfokus pada grup matriks berdimensi rendah atau *symmetric positive definite* (SPD) dan pada grup Lie matriks kompak seperti $SO(3)$ (Bildirici et al., 2022). Sementara itu, grup Lie matriks Heisenberg masih belum ada yang meneliti secara komprehensif. Grup Lie matriks Heisenberg ini termasuk pada grup Lie matriks nilpoten yang tidak kompak (Cagliero & Gutierrez, 2025). Khususnya terkait model suku bunga, belum ada model suku bunga yang memanfaatkan struktur *central extension* dari grup Heisenberg berdimensi 5 dan penelitian teoritis serta terapan pada data pasar real juga masih sangat terbatas. Oleh karena itu, penelitian model suku bunga pada grup Heisenberg berdimensi 5 sangat penting untuk dilakukan.

Meskipun demikian, beberapa penelitian pendahuluan telah banyak dilakukan peneliti, antara lain: penerapan pola grup Lie Heisenberg-Weyl pada kasus *pricing kernel* yaitu terkait *Quantization of Quadratic Hamiltonians*, penerapan grup Lie matriks $SO(2)$ dalam korelasi aset volatile (Bildirici et al., 2025), analisis simetri pada *pricing obligation* kupon nol dan solusi

tertutup berdasarkan struktur grup yaitu penerapan teori simetri Lie untuk persamaan diferensial parsial model suku bunga (Kaibe & O'Hara, 2019) serta penerapan simetri Lie pada opsi finansial dan Heston model dengan suku bunga stokastik untuk penentuan harga derivatif (Tseng et al., 2021). Secara singkat, model suku bunga melalui pendekatan berbasis grup Lie telah berkembang dalam dua arah yaitu *quantization* dan simetri untuk *pricing kernel*, dan pemodelan struktur korelasi dan suku bunga melalui persamaan diferensial stokastik dan persamaan diferensial parsial. Namun, aplikasinya pada grup Lie matriks Heisenberg berdimensi 5 masih terbatas dan perlu diteliti lebih jauh khususnya dengan menggunakan persamaan diferensial stokastik.

Selanjutnya, model suku bunga berbasis grup Lie matriks dapat diterapkan dalam pembiayaan hijau atau *green finance* (C. Liu & Wu, 2023; N. Liu et al., 2020; Miao et al., 2025; H. Wang et al., 2023; W. Wang & Zhang, 2022). Penelitian-penelitian tentang pembiayaan hijau sudah banyak dikembangkan oleh para peneliti khususnya dalam bidang matematika keuangan dan ekonomi (La Torre et al., 2024; N. Liu et al., 2020; Xing et al., 2024; Zhang & Cheung, 2025; Zhu et al., 2025). Di sisi lain, penelitian-penelitian tentang model suku bunga berbasis grup Lie matriks jumlahnya masih sangat sedikit (Bildirici et al., 2022; Lim & Privault, 2016; Park et al., 2011). Terdapat beberapa kelemahan dari penelitian-penelitian model suku bunga berbasis grup Lie matriks tersebut, antara lain belum mengadopsi keberlanjutan terkait pembiayaan hijau dan jenis grup Lie matriks yang digunakan masih terbatas pada $SO(3)$ dan masih terbatas pada grup Lie matriks kompak. Oleh karena itu, teori baru terkait model suku bunga berbasis grup Lie matriks masih dapat dikembangkan lebih lanjut.

Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan untuk menentukan rumus eksplisit model *short rate* pada grup Lie Heisenberg berdimensi 5 sebagai *diffusional process* dalam struktur manifold non-abelian. Hasil yang diperoleh ternyata memperjelas atau mengkonfirmasi model suku bunga yang diperoleh Brenna dan Schwartz (Park et al., 2011). Brenna dan Schwartz juga telah menentukan sifat-sifat model suku bunga tersebut seperti eksistensi solusi, stabilitas, dan *affine structure*. Simulasi suku bunga berdasarkan grup Lie matriks dapat dilihat untuk kasus grup Lie matriks $SO(3)$ (Bildirici et al., 2022). Faktor ketidakstabilan ekonomi khususnya dalam kondisi wabah covid-19 juga menjadi pertimbangan penentuan model suku bunga berbasis grup matriks $SO(3)$. Dibandingkan dengan model suku bunga yang lain, model suku bunga berbasis grup matriks $SO(3)$ lebih inovatif dan adaptif.

B. Metode Penelitian

Pendekatan yang digunakan dalam penelitian ini berupa metode analisis kualitatif yaitu studi literatur terkait model-model suku bunga berbasis grup Lie matriks. Dalam tahap ini, dilakukan juga penentuan *gap* penelitian dan konstruksi model suku bunga pada grup Lie matriks Heisenberg berdimensi 5.

Langkah-Langkah Penelitian:

1. Studi literatur. Motivasi pemodelan suku bunga berbasis grup Lie matriks ini salah satunya berasal dari grup Lie matriks $SO(2) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) | \det(A) = 1\}$ (Lim & Privault, 2016) dengan $M_2(\mathbb{R})$ menotasikan himpunan semua matriks dengan entri bilangan real berordo 2×2 . Dalam hal ini, model suku bunga pada grup Lie matriks ini diberikan oleh:

$$r(R) = \text{trace}(MR) \quad (1)$$

dengan $M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix} > 0$ adalah matriks simetris definit positif dan matriks $R = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in SO(2)$.

Definisi 1 (Park et al., 2011). Misalkan G grup Lie matriks berdimensi n dengan $\text{Lie}(G) = \mathfrak{g} = \langle X_1, X_2, \dots, X_n \rangle$. Ruang keadaan pada grup Lie matriks G diberikan oleh persamaan

$$dX = X \cdot \psi(X)dt + X \sum_{i=1}^n \tau_i(X)X_i dw_i \quad (2)$$

dengan $X \in G$, $dX \in \mathfrak{g}$, pemetaan $\psi: G \ni X \mapsto \psi(X) \in \mathfrak{g}$ dan $\tau_i: G \ni X \mapsto \tau_i(X) \in \mathbb{R}$ dianggap C^2 , serta dw_i menotasikan proses wiener.

Selanjutnya, jika pemetaan-pemetaan ψ dan τ_i constant, maka Persamaan (1) menjadi:

$$dX = X\psi dt + XdW \quad (3)$$

Lebih jauh, dengan menggunakan Persamaan (2), untuk fungsi kuadrat $f(X) = \frac{1}{2}\text{trace}(X^t Q X N)$ dengan Q dan N keduanya matriks simetrik, maka dinamik untuk f diberikan oleh persamaan:

$$df = \text{trace} \left(X^t Q X (\psi N dt + dW \cdot N + \frac{1}{2} dW \cdot N \cdot dW^t + \frac{1}{2} dW \cdot dW \cdot N) \right). \quad (4)$$

2. Model pada Persamaan (2) akan dikembangkan untuk kasus grup Lie matriks heisenberg berdimensi 5 dengan menentukan rumus eksplisit suku bunganya.

C. Hasil dan Pembahasan

Grup Lie matriks Heisenberg berdimensi $2n + 1$ dinotasikan oleh $\mathbb{H}_n$ dan elemen-elemennya dapat dinyatakan dalam bentuk matriks persegi berukuran $(n + 2) \times (n + 2)$. Khususnya untuk $n = 2$, grup Lie matriks Heisenberg mempunyai dimensi 5 dan dinotasikan oleh $\mathbb{H}_2$. Elemen-elemennya dinotasikan oleh matriks persegi berukuran 4×4 sebagai berikut:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & z \\ 0 & 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x_1, x_2, z, y_1, y_2 \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Dalam hal ini, matriks X dapat diidentifikasi oleh elemen $(x_1, x_2, y_1, y_2, z) \in \mathbb{R}^5$.

Aljabar Lie dari $\mathbb{H}_n$ dinotasikan oleh $\mathfrak{h}_n$ dan elemen-elemennya juga dapat dinyatakan dalam bentuk matriks persegi berukuran $(n + 2) \times (n + 2)$. Misalkan basis untuk $\mathfrak{h}_n$ diberikan oleh $B = \{X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_n, Z\}$ maka *bracket* Lie untuk $\mathfrak{h}_n$ diberikan oleh persamaan

$$[X_k, Y_k] = Z, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (6)$$

Elemen-elemen aljabar Lie Heisenberg $\mathfrak{h}_2$ berdimensi 5 dapat dinyatakan dalam bentuk matriks berukuran 4×4 sebagai berikut:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha, \alpha_2, \gamma, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Dengan kata lain, $X = \alpha X_1 + \alpha_2 X_2 + \beta_1 Y_1 + \beta_2 Y_2 + \gamma Z$ dan *bracket* Lie-nya diberikan oleh $[X_1, Y_1] = Z = [X_2, Y_2]$. Dengan menggunakan Persamaan (2) dan (3) maka diperoleh:

Proposisi 1. Misalkan $\mathbb{H}_2$ grup Lie Heisenberg yang elemen-elemennya dapat diidentifikasi

oleh matriks $X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & z \\ 0 & 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq (x_1, x_2, y_1, y_2, z) \in \mathbb{R}^5$. Selanjutnya misalkan

aljabar Lie dari $\mathbb{H}_2$ dinotasikan oleh $\mathfrak{h}_2$ yang basisnya diberikan oleh himpunan $S = \{X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z\}$ dan elemen-elemennya dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \beta_1 Y_1 + \beta_2 Y_2 + \gamma Z.$$

Maka persamaan dinamik (SDE)-nya dinyatakan dalam bentuk

$$dd \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ y_1(t) \\ y_2(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \alpha_1 dt + b_1 dw_1 \\ \alpha_2 dt + b_2 dw_2 \\ \beta_1 dt + b_3 dw_3 \\ \beta_2 dt + b_4 dw_4 \\ (\gamma + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) dt + b_5 dw_5 + x_1 b_3 dw_3 + x_2 b_4 dw_4 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Bukti. Menggunakan Persamaan (1) dan (2) diperoleh:

$$\begin{aligned} dX &= d(x_1(t), x_2(t), y_1(t), y_2(t), z(t)) = X\psi dt + X \sum_{i=1}^5 b_i dw_i \\ &= \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & z \\ 0 & 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} dt \\ &\quad + \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & z \\ 0 & 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b_1 dw_1 & b_2 dw_2 & b_5 dw_5 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 dw_3 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 dw_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \gamma + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} dt \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 & b_1 dw_1 & b_2 dw_2 & b_5 dw_5 + x_1 b_3 dw_3 + x_2 b_4 dw_4 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 dw_3 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 dw_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dengan kata lain, persamaan dinamik pada grup Lie Heisenberg $\mathbb{H}_2$ diberikan oleh persamaan

$$d \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ y_1(t) \\ y_2(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \alpha_1 dt + b_1 dw_1 \\ \alpha_2 dt + b_2 dw_2 \\ \beta_1 dt + b_3 dw_3 \\ \beta_2 dt + b_4 dw_4 \\ (\gamma + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) dt + b_5 dw_5 + x_1 b_3 dw_3 + x_2 b_4 dw_4 \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya, untuk menentukan model suku bunga $r(t)$ pada grup Lie matriks Heisenberg berdimensi 5 dapat menggunakan model linear sebagai berikut.

$$r(t) = ax_1(t) + bx_2(t) + cy_1(t) + dy_2(t) + ez(t). \quad (9)$$

Proposisi 2. Model suku bunga linear $dr(t)$ pada pada grup Lie matriks Heisenberg berdimensi 5 dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} dr(t) &= (a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\beta_1 + d\beta_2 + e[\gamma + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2]) dt + ab_1 dw_1 + bb_2 dw_2 \\ &\quad + (cb_3 + ex_1 b_3) dw_3 + (db_4 + ex_2 b_4) dw_4 + eb_5 dw_5. \end{aligned} \quad (10)$$

Bukti. Dengan menentukan turunan pertama persamaan (9) maka diperoleh

$$dr(t) = a dx_1(t) + b dx_2(t) + c dy_1(t) + dy_2(t) + edz(t).$$

Dengan mensubstitusi persamaan (8) dalam Proposisi 1 maka didapat persamaan:

$$\begin{aligned} dr(t) = & a(\alpha_1 dt + b_1 dw_1) + b(\alpha_2 dt + b_2 dw_2) + c(\beta_1 dt + b_3 dw_3) \\ & + d(\beta_2 dt + b_4 dw_4) \\ & + e([\gamma + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2]dt + b_5 dw_5 + x_1 b_3 dw_3 + x_2 b_4 dw_4). \end{aligned}$$

Dengan mengelompokkan faktor dt dan dw_i maka diperoleh:

$$\begin{aligned} dr(t) = & (a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\beta_1 + d\beta_2 + e[\gamma + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2]) dt + ab_1 dw_1 + bb_2 dw_2 \\ & + (cb_3 + ex_1 b_3)dw_3 + (db_4 + ex_2 b_4)dw_4 + eb_5 dw_5. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Persamaan (10) ini merupakan model suku bunga Brenna and Schwartz (Park et al., 2011), yaitu:

$$dr = (\alpha + \beta r)dt + (\sigma r)dw. \quad (11)$$

D. Simpulan

Telah dibuktikan bahwa model suku bunga pada grup Lie matriks dapat dinyakan dalam (10). Model suku bunga tersebut dikonstruksi melalui persamaan dinamik pada persamaan (8). Penelitian ini berhasil mendekonstruksi keterbatasan model suku bunga jangka pendek klasik (seperti Vasicek atau CIR) yang umumnya bersifat linear atau kaku dalam menangani dinamika pasar non-linear. Melalui formulasi Grup Lie Matriks Heisenberg Berdimensi 5, pemodelan suku bunga jangka pendek tidak lagi sekadar fungsi pelacakan arah (*drift*) dan volatilitas konstan.

Secara substantif, kenaikan struktur menjadi dimensi 5 memberikan ruang geometris (lewat empat generator non-sentral) yang secara inheren mampu menyatukan dinamika suku bunga jangka pendek, volatilitas stokastik, dan efek guncangan pasar (*market shocks*) non-linear ke dalam satu kesatuan aljabar yang bebas-arbitrase (*arbitrage-free*). Sifat non-komutatif dari aljabar Lie $\mathfrak{h}_2$ terbukti secara matematis mampu menangkap fenomena *cross-coupling* yaitu bagaimana interaksi antara volatilitas dari volatilitas dan ekspektasi makroekonomi saling memengaruhi interdependensi suku bunga jangka pendek secara simultan, sebuah kompleksitas yang gagal ditangkap oleh struktur Grup Lie berdimensi rendah. Lebih jauh, model suku bunga ini mengkonfirmasi model suku bunga yang telah diperoleh Brenna and Schwartz. Untuk penelitian selanjutnya, dapat dikembangkan model suku bunga berdasarkan grup Lie matriks Heisenberg berdimensi $2n + 1$ dan diduga juga model suku bunganya mengikuti model suku bunga Brenna and Schwartz.

Daftar Pustaka

- Bildirici, M., Ucan, Y., & Lousada, S. (2022). Interest Rate Based on The Lie Group $SO(3)$ in the Evidence of Chaos. *Mathematics*, 10(21), 3998. <https://doi.org/10.3390/math10213998>
- Bildirici, M., Ucan, Y., & Tekercioglu, R. (2025). Stochastic $SO(2)$ Lie Group Method for Approximating Correlation Matrices. *Mathematics*, 13(9), 1496. <https://doi.org/10.3390/math13091496>
- Cagliero, L., & Gutierrez, G. (2025). G-tables and the Poisson structure of the even cohomology of cotangent bundle of the Heisenberg Lie group. *Journal of Algebra*, 674, 205–234. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2025.02.040>
- Kaibe, B. C., & O'Hara, J. G. (2019). Symmetry Analysis of an Interest Rate Derivatives PDE Model in Financial Mathematics. *Symmetry*, 11(8), 1056. <https://doi.org/10.3390/sym11081056>
- La Torre, M., Leo, S., Palma, A., & Zapata, J. D. S. (2024). Public spending and green finance: A systematic literature review. *Research in International Business and Finance*, 68, 102197. <https://doi.org/10.1016/j.ribaf.2023.102197>
- Lim, N., & Privault, N. (2016). Analytic bond pricing for short rate dynamics evolving on matrix Lie groups. *Quantitative Finance*, 16(1), 119–129. <https://doi.org/10.1080/14697688.2014.990497>
- Liu, C., & Wu, S. S. (2023). Green finance, sustainability disclosure and economic implications. *Fulbright Review of Economics and Policy*, 3(1), 1–24. <https://doi.org/10.1108/FREP-03-2022-0021>
- Liu, N., Liu, C., Xia, Y., Ren, Y., & Liang, J. (2020). Examining the Coordination Between Green Finance and Green Economy Aiming for Sustainable Development: A Case Study of China. *Sustainability*, 12(9), 3717. <https://doi.org/10.3390/su12093717>
- Luo, S., Yan, J., & Zhang, Q. (2012). A functional transformation approach to interest rate modelling (pp. 303–315). https://doi.org/10.1142/9789814383318_0013
- Miao, Y., Tian, Y., Cao, J., & Yu, X. (2025). Green finance and privatization of green projects in the fossil fuels industry. *Resources Policy*, 103, 105547. <https://doi.org/10.1016/j.resourpol.2025.105547>
- Park, F. C., Chun, C. M., Han, C. W., & Webber, N. (2011). Interest rate models on Lie groups. *Quantitative Finance*, 11(4), 559–572. <https://doi.org/10.1080/14697680903468963>
- Sinkala, W., Leach, P. G. L., & O'Hara, J. G. (2008). Zero-coupon bond prices in the Vasicek and CIR models: Their computation as group-invariant solutions. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 31(6), 665–678. <https://doi.org/10.1002/mma.935>
- Tseng, S.-H., Nguyen, T. S., & Wang, R.-C. (2021). The Lie Algebraic Approach for Determining Pricing for Trade Account Options. *Mathematics*, 9(3), 279. <https://doi.org/10.3390/math9030279>
- Wang, H., Du, D., Tang, X., & Tsui, S. (2023). Green finance pilot reform and corporate green innovation. *Frontiers in Environmental Science*, 11. <https://doi.org/10.3389/fenvs.2023.1273564>
- Wang, W., & Zhang, Q. (2022). Does Green Finance Reform Promote Corporate Green Innovation? Evidence from a Quasi-Natural Experiment. *Mathematical Problems in Engineering*, 2022, 1–12. <https://doi.org/10.1155/2022/7503917>
- Xing, L., Chang, B. H., & Aldawsari, S. H. (2024). Green Finance Mechanisms for Sustainable Development: Evidence from Panel Data. *Sustainability*, 16(22), 9762. <https://doi.org/10.3390/su16229762>
- Zhang, S., & Cheung, A. (Waikong). (2025). Are green finance and inclusive finance complements or substitutes for MSMEs? – Evidence from China's green finance reform and innovation pilot zone. *Energy Economics*, 141, 108125. <https://doi.org/10.1016/j.eneco.2024.108125>
- Zhu, Y., Lin, B., & Zhu, R. (2025). Impact assessment of green finance reforms on renewable energy development. *Environmental Impact Assessment Review*, 114, 107913. <https://doi.org/10.1016/j.eiar.2025.107913>