HUBUNGAN ANTARA PEMETAAN LINEAR DAN BILINEAR

Mustafa A.H. Ruhama
Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan MIPA,
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Unveristas Khairun

ABSTRAK

Let U, V and W are vector spaces at the same field, $\varphi : U \rightarrow V$ is linear mapping and $\mathbb{C}$ is complex numbers. $\mathcal{L}(U,V)$ the collection of all linear mapping $\varphi : U \rightarrow V$. If $V = \mathbb{C}$ that φ is linear functional. Let $\varphi : U \times V \rightarrow W$ bilinear mapping, if $W = \mathbb{C}$ that φ is bilinear functional. The collection of all bilinear mapping $\varphi : U \times V \rightarrow W$ denoted with $\mathfrak{B}(U,V;W)$. Based on the explanation above, problems we will discuss about relation between linear mapping, bilinear mapping and bilinear functional, some properties at bilinear mapping. Furthermore will see $\mathfrak{B}(U,V,W)$ is vector space toward operation $(\varphi + \psi)(x,y) = \varphi(x,y) + \psi(x,y)$ and $(\lambda\varphi)(x,y) = \lambda\varphi(x,y)$ for all scalar λ, $x \in U$, $y \in V$ and $\varphi, \psi \in \mathfrak{B}(U,V;W)$.

Keywords: Vector space, linear mapping, and bilinear mapping.

A. Pendahuluan

Konsep himpunan dan pemetaan (fungsi) merupakan konsep yang dikenal hampir di semua cabang matematika, walaupun terminologi dan notasi yang digunakan berbeda-beda. Diketahui U dan V masing-masing himpunan yang tak kosong, jika φ adalah suatu pemetaan dari himpunan U ke himpunan V, maka pemetaan tersebut dinotasikan dengan $\varphi : U \rightarrow V$ atau $U \overset{\varphi}{\rightarrow} V$.

Jika A dan B masing-masing dua himpunan yang tak kosong ($A \neq \emptyset$ dan $B \neq \emptyset$), maka himpunan yang didefinisikan dengan $A \times B = \{(x,y): x \in A \;\&\; y \in B\}$ disebut himpunan hasil ganda Cartesius (*Cartesian product*) himpunan A dengan B.

Himpunan yang terdiri atas elemen-elemen yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu disebut ruang. Di dalam analisis modern, beberapa ruang yang sering dibicarakan adalah ruang vektor, ruang metrik, ruang bernorma, ruang Banach, ruang pre-Hilbert dan ruang Hilbert. Diketahui U, V dan W masing-masing ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) dan $\varphi : U \rightarrow V$ merupakan pemetaan linear. Jika $V = \mathbb{C}$ maka φ disebut fungsional linear. Diberikan $\varphi : U \times V \rightarrow W$ pemetaan bilinear, jika $W = \mathbb{C}$ maka φ disebut fungsional bilinear. Koleksi semua pemetaan linear $\varphi : U \rightarrow V$ dinotasikan dengan $\mathcal{L}(U,V)$ serta $\mathfrak{B}(U,V;W)$ merupakan koleksi semua pemetaan bilinear $\varphi : U \times V \rightarrow W$.

 ISSN 2089-855X

Berdasarkan pemikiran diatas, permasalahan yang akan diteliti adalah (1) apakah $\mathfrak{B}(U,V,W)$ merupakan ruang vektor terhadap operasi $(\varphi+\psi)(x,y)=\varphi(x,y)+\psi(x,y)$ dan $(\lambda\varphi)(x,y)=\lambda\varphi(x,y)$ untuk sebarang skalar λ, $x\in U$, $y\in V$ dan $\varphi,\psi\in\mathfrak{B}(U,V;W)$?, (2) hubungan antara pemetaan linear, pemetaan bilinear, dan fungsional bilinear serta (3) sifat yang berlaku pada pemetaan bilinear.

B. Operasi Biner

Secara intuitif suatu operasi biner atas suatu himpunan S adalah suatu aturan yang menggabungkan dua unsur dari S menjadi satu unsur dari S. Sebelum mendefinisikan operasi biner dalam konteks yang lebih umum, perlu diberikan definisi tentang relasi suatu himpunan sebagai berikut:

Definisi 1.1.1.1. Diketahui A dan B masing-masing dua himpunan yang tak kosong. Suatu **relasi** R dari A ke B adalah himpunan bagian dari $A\times B=\{(x,y): x\in A \;\&\; y\in B\}$. Dengan perkataan lain suatu relasi R dari A ke B adalah suatu aturan yang menghubungkan unsur dari A ke B.

Andaikan R adalah relasi dari A ke B, dan misalkan R menghubungkan $x\in A$ ke $y\in B$. Hubungan ini dinotasikan dengan xRy atau $(x,y)\in R$.

Definisi 1.1.1.2. Suatu operasi biner $*$ atas suatu himpunan S adalah suatu relasi yang menghubungkan setiap pasangan berurutan (x,y) dari unsur-unsur di S ke tepat satu $z\in S$, dan dinotasikan dengan $x*y=z$.

C. Pemetaan

Definisi 1.1.2.1. Diketahui A dan B himpunan tak kosong. Suatu pemetaan φ dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu aturan yang menghubungkan setiap unsur dari himpunan A ke tepat satu unsur dari himpunan B.

Jika φ adalah suatu pemetaan dari himpunan A ke himpunan B, maka pemetaan tersebut dinotasikan dengan $\varphi : A \to B$ atau $A \xrightarrow{\varphi} B$. Himpunan A disebut **domain** (daerah asal) dari φ dan dinotasikan dengan $D(\varphi)$ serta himpunan B disebut **kodomain**(daerah kawan) dan dinotasikan dengan $C(\varphi)$. Jika φ menghubungkan $a\in A$ ke $b\in B$, maka b dikatakan sebagai bayangan dari a oleh pemetaan φ dan dinotasikan dengan $\varphi(a)$= b. Himpunan R (φ)= $\{\varphi(\mathrm{a})\colon \mathrm{a}\ \in D(\varphi)\}$ disebut **range** atau daerah hasil.

D. Ruang Vektor

Sebelum membahas ruang vektor (ruang linear) terlebih dahulu diberikan tentang pengertian grup komutatif dan lapangan (*filed*).

Definisi 1.1.3.1. V himpunan tak kosong dengan operasi biner $*$ merupakan grup komutatif (*abelian*) jika memenuhi:

(i). Untuk setiap $v_1, v_2 \in V$ berlaku $v_1 * v_2 = v_2 * v_1$.

(ii). Untuk setiap $v_1, v_2, v_3 \in V$ berlaku $v_1 * (v_2 * v_3) = (v_1 * v_2) * v_3$.

(iii). Terdapat unsur e sehingga untuk setiap $v \in V$ berlaku $v * e = e * v = v$. e disebut unsur identitas terhadap operasi $*$.

(iv). Untuk setiap $v \in V$ terdapat $v^{-1} \in V$ sehingga berlaku $v * v^{-1} = v^{-1} * v = e$. v^{-1}disebut invers terhadap operasi $*$.

Suatu grup V dengan operasi biner $*$ dinotasikan dengan $(V,*)$.

Definisi 1.1.3.2. F himpunan tak kosong dengan dua operasi biner, yang dinotasikan dengan $\oplus$ dan $\cdot$ merupakan lapangan jika memenuhi:

(i). $(F, \oplus)$ grup komutatif.

(ii). $(F, \cdot)$ grup komutatif.

(iii). Untuk setiap $a, b, c \in F$ berlaku

$a \cdot (b \oplus c) = a \cdot b \oplus a \cdot c$ dan $(a \oplus b) \cdot c = a \cdot c \oplus b \cdot c$.

Contoh 1.1.3.3

1. $\mathbb{R}$ merupakan himpunan bilangan real (nyata) dengan operasi penjumlahan biasa merupakan grup komutatif, sebab

(i). Untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ berlaku $x + y = y + x$.

(ii). Untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}$ berlaku $x + (y + z) = (x + y) + z$.

(iii). Terdapat unsur 0 sehingga untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ berlaku $x + 0 = 0 + x = x$. 0 disebut unsur identitas terhadap operasi penjumlahan.

(iv). Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ terdapat $-x \in \mathbb{R}$ sehingga berlaku

$x + (-x) = (-x) + x = 0$. $-x$ disebut invers terhadap operasi penjumlahan.

2. $\mathbb{R}$ dengan operasi penjumlahan (+) dan perkalian ($\cdot$) biasa merupakan lapangan , sebab

(i). $(\mathbb{R}, +)$ grup komutatif.

(ii). $(\mathbb{R}, \cdot)$ grup komutatif.

(iii). Untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}$ berlaku

$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ dan $(x + y) \cdot z = x \cdot y + y \cdot z$.

 ISSN 2089-855X

Definisi 1.1.3.4. Diketahui $(V, +)$ grup komutatif dan $(F, \oplus, \cdot)$ lapangan. V disebut **ruang vektor** (*vector space*) atau **ruang linear** atas F jika terdapat operasi $*$ antara keduanya sehingga untuk setiap $x \in V$ dan $\alpha \in F$ menentukan dengan tunggal $\alpha * x$ yang memenuhi sifat-sifat:

(i). $\alpha * (x + y) = \alpha * x + \alpha * y$,

(ii). $(\alpha \oplus \beta) * x = \alpha * x + \beta * x$,

(iii). $(\alpha \cdot \beta) * x = \alpha * (x * \beta)$,

(iv). $1 * x = x$,

untuk setiap $x, y \in V$ dan $\alpha, \beta \in F$.

Untuk penyederhanaan penulisan $\alpha * x$ cukup ditulis αx , $\alpha \oplus \beta$ cukup ditulis $\alpha + \beta$, dan $\alpha \cdot \beta$ cukup ditulis dengan $\alpha\beta$, asalkan tak ada salah pengertian. Anggota ruang vektor disebut **vektor** sedangkan anggota F disebut **skalar**.

Contoh 1.1.3.5

1. Diberikan $n \in \mathbb{N}$ dan dibentuk $\mathbb{R}^n = \{\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$. Operasi penjumlahan dan perkalian skalar didefinisikan sebagai berikut:
$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$
$$\alpha\bar{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$
untuk setiap $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$. $\mathbb{R}^n$ merupakan ruang vektor real.
2. $V = C[a, b]$, yaitu koleksi semua fungsi kontinu dari $[a, b]$ ke $\mathbb{R}$. Operasi penjumlahan (+) pada $C[a, b]$ didefinisikan sebagai berikut: Untuk setiap $f, g \in C[a, b]$, fungsi $f + g$ didefinisikan sebagai
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),\ x \in [a, b]$$
maka V merupakan grup komutatif, dengan $(-f)(x) = -f(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$.Jika untuk setiap $f \in V = C[a, b]$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ didefinisikan fungsi αf, dengan rumus $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, $x \in [a, b]$ maka dapat dilihat bahwa $\alpha f \in V$. V merupakan ruang vektor real.

E. Hubungan Pemetaan Linear dan Bilinear

Membahas hubungan antara pemetaan linear dan bilinear dapat diawali dari definisi dan selanjutnya dapat dilihat dari teorema.

1. Pemetaan Linear

Definisi 1.2.1.1. Diberikan dua ruang vektor U dan V, masing-masing atas lapangan F yang sama. Pemetaan $\varphi : U \to V$ dikatakan ***linear*** jika memenuhi:

(i). φ pemetaan aditif: $\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$, untuk setiap $u_1, u_2 \in U$.

(ii). φ pemetaan homogen: $\varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u)$, untuk setiap λ sebarang skalar dan $u \in U$.

Contoh 1.2.1.2.

1. $\mathbb{R}$ merupakan ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}$. Pemetaan $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan rumus

$$\varphi(x) = \alpha x, \text{ untuk setiap } \alpha \in \mathbb{R}$$

merupakan pemetaan linear, sebab untuk setiap x, y, $\beta \in \mathbb{R}$ berlaku

(i). $\varphi(x + y) = \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y = \varphi(x) + \varphi(y)$ dan

(ii). $\varphi(\beta x) = \alpha\beta(x) = \beta\, \alpha(x) = \beta\varphi(x)$

2. Diberikan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pemetaan $\psi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dengan rumus

$$\psi(\bar{x}) = \psi(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2$$

merupakan pemetaan linear, sebab untuk setiap $\bar{x} = (x_1, x_2)$, $\bar{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ dan sebarang skalar γ berlaku:

(i). $\psi(\bar{x} + \bar{y}) = \psi\big((x_1, x_2) + (y_1, y_2)\big) = (\alpha x_1 + \beta x_2) + (\alpha y_1 + \beta y_2)$

$$= \psi(\bar{x}) + \psi(\bar{y})$$

(ii). $\psi(\gamma\bar{x}) = \gamma(\alpha x_1 + \beta x_2) = \gamma\psi(\bar{x})$.

Teorema 1.2.1.3. Diketahui U dan V masing-masing ruang vektor atas lapangan yang sama. Jika $\varphi : U \to V$ merupakan pemetaan linear, maka

(i). $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, untuk setiap $x \in U$.

(ii). $\varphi(x - y) = \varphi(x) - \varphi(y)$, untuk setiap $x, y \in U$.

(iii). $\varphi(\theta) = \bar{\theta}$, dengan $\theta \in U$ dan $\bar{\theta} \in V$.

(iv). $\varphi(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, \varphi(x_k)$, untuk setiap skalar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ dan vektor $x_1, x_2, \dots, x_n \in U$.

Bukti:

(i). Karena φ homogen dan $-x = (-1)x$ untuk setiap $x \in U$ maka

$$\varphi(-x) = \varphi\big((-1)x\big) = -1\varphi(x) = -\varphi(x).$$

(ii). Untuk setiap $x, y \in U$ dan $x - y = x + (-y)$. Selanjutnya, karena φ aditif dan berdasarkan (i) diperoleh $\varphi(x - y) = \varphi\big(x + (-y)\big) = \varphi(x) + \varphi(-y)$

$$= \varphi(x) - \varphi(y).$$

(iii). Berdasarkan (ii), diperoleh $\varphi(\theta) = \varphi(x - x) = \varphi(x) - \varphi(x) = \bar{\theta}$.

(iv). Karena φ homogen, maka pernyataan benar untuk $n = 1$. Dianggap pernyaan benar juga untuk n vektor. Untuk $n + 1$ vektor diperoleh

$$\varphi(\textstyle\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k) = \varphi(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k + \alpha_{n+1} x_{n+1})$$

$$= \varphi(\textstyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k) + \alpha_{n+1}\varphi(x_{n+1})$$

$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi(x_k) + \alpha_{n+1}\varphi(x_{n+1})$
$= \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \, \varphi(x_k).$

Definisi 1.2.1.4. Diberikan dua ruang vektor U dan V masing-masing atas lapangan F yang sama. $\mathcal{L}(U,V)$ merupakan koleksi semua pemetaan linear $\varphi : U \to V$.

Berdasarkan definisi 1.2.1.4, jika $V = \mathbb{C}$, dimana $\mathbb{C}$ merupakan himpunan bilangan kompleks maka φ disebut ***fungsional linear***. Jadi, $\varphi \in \mathcal{L}(U,\mathbb{C})$.

Contoh 1.2.1.5.

Diberikan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pemetaan $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ dengan rumus

$$\varphi(\bar{x}) = \varphi(x_1, x_2) = \alpha(x_1 + ix_1) + \beta(x_2 + ix_2)$$

merupakan fungsional linear, sebab untuk setiap $\bar{x} = (x_1, x_2)$, $\bar{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ dan sebarang skalar γ berlaku:

(i). $\varphi(\bar{x} + \bar{y}) = \varphi\big((x_1, x_2) + (y_1, y_2)\big) = \varphi\big((x_1 + y_1), (x_2 + y_2)\big)$
$= \alpha\big((x_1 + y_1) + i(x_1 + y_1)\big) + \beta\big((x_2 + y_2) + i(x_2 + y_2)\big)$
$= (\alpha(x_1 + ix_1) + \beta(x_2 + ix_2)) + (\alpha(y_1 + iy_1) + \beta(y_2 + iy_2))$
$= \varphi(\bar{x}) + \varphi(\bar{y}).$

(ii). $\varphi(\gamma\bar{x}) = \varphi\big((\gamma(x_1, x_2)\big) = \gamma(\alpha(x_1 + ix_1) + \beta(x_2 + ix_2)) = \gamma\varphi(\bar{x}).$

2. Pemetaan Bilinear

Definisi 1.2.2.1. Diketahui U, V, dan W ruang vektor. Pemetaan $\varphi : U \times V \to W$ dikatakan ***bilinear*** jika memenuhi:

(i). $\varphi(u_1 + u_2, v) = \varphi(u_1, v) + \varphi(u_2, v)$, untuk setiap $u_1, u_2 \in U$ dan $v_1, v_2 \in V$.

(ii). $\varphi(\lambda u, v) = \lambda\varphi(u, v)$, untuk setiap $u \in U$, $v \in V$ dan λ sebarang skalar.

(iii). $\varphi(u, v_1 + v_2) = \varphi\,(u, v_1) + \varphi\,(u, v_2)$, untuk setiap $u \in U$ dan $v_1, v_2 \in V$.

(iv). $\varphi(u, \lambda v) = \lambda\varphi(u, v)$, untuk setiap $u \in U$, $v \in V$ dan λ sebarang skalar.

Jika $W = \mathbb{C}$, φ disebut ***fungsional bilinear*** pada $U \times V$.

Jika U, V, dan W masing-masing ruang vektor, maka koleksi semua pemetaan bilinear $\varphi : U \times V \to W$ dinotasikan dengan $\mathfrak{B}(U, V; W)$.

Contoh 1.2.2.2.

2 $\mathbb{R}$ merupakan ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}$. Didefinisikan pemetaan $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan rumus $\varphi(x, y) = 2xy$. Pemetaan φ merupakan pemetaan bilinear, sebab

(i). Untuk setiap $x_1, x_2, y \in \mathbb{R}$ berlaku

$$\varphi(x_1 + x_2, y) = 2(x_1 + x_2)y = 2x_1y + 2x_2y = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y).$$

(ii). Untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ berlaku $\varphi(\lambda x, y) = 2\lambda xy = \lambda 2xy = \lambda\varphi(x, y)$, untuk

 ISSN 2089-855X

$\lambda \in \mathbb{R}$.

(iii). Untuk setiap $x, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ berlaku

$$\varphi(x, y_1 + y_2) = 2x(y_1 + y_2) = 2xy_1 + 2xy_2 = \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2).$$

(iv). Untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ berlaku $\varphi(x, \lambda y) = 2x\lambda y = \lambda 2xy = \lambda\varphi(x, y)$, untuk $\lambda \in \mathbb{R}$.

3 $\mathbb{R}$ merupakan ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}$. Didefinisikan pemetaan $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dengan rumus $\varphi(x, y) = (1 + i)xy$. Pemetaan φ merupakan fungsional bilinear, sebab

(i). Untuk setiap $x_1, x_2, y \in \mathbb{R}$ berlaku

$$\begin{aligned}\varphi(x_1 + x_2, y) = (1 + i)(x_1 + x_2)y &= (1 + i)(x_1y + x_2y).\\ &= (1 + i)x_1y + (1 + i)x_2y)\\ &= \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y).\end{aligned}$$

(ii). Untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ berlaku

$$\varphi(\lambda x, y) = (1 + i)\lambda xy = \lambda(1 + i)xy = \lambda\varphi(x, y) \text{ untuk } \lambda \in \mathbb{R}..$$

(iii). Untuk setiap $x, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ berlaku

$$\begin{aligned}\varphi(x, y_1 + y_2) = (1 + i)x(y_1 + y_2) &= (1 + i)(xy_1 + xy_2).\\ &= (1 + i)xy_1 + (1 + i)xy_2)\\ &= \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2).\end{aligned}$$

(iv). Untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ berlaku

$$\varphi(x, \lambda y) = (1 + i)x(\lambda y) = \lambda(1 + i)xy = \lambda\varphi(x, y) \text{ untuk } \lambda \in \mathbb{R}..$$

4 Diberikan $\mathbb{R}^n = \{\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n): x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$. Didefinisikan pemetaan $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dengan rumus $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$, untuk setiap $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Pemetaan φ merupakan pemetaan bilinear, sebab

(i). Untuk setiap $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n), \bar{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ berlaku

$$\begin{aligned}\varphi(\bar{x} + \bar{y}, \bar{z}) = \textstyle\sum_{k=1}^{n}(x_k + y_k)z_k &= (x_1 + y_1)z_1 + \dots + (x_n + y_n)z_n\\ &= x_1z_1 + y_1z_1 + \dots + x_nz_n + y_nz_n\\ &= (x_1z_1 + \dots + x_nz_n) + (y_1z_1 + \dots + y_nz_n)\\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n}(x_k + z_k) + \sum_{k=1}^{n}(y_k + z_k)\\ &= \varphi(\bar{x}, \bar{z}) + \varphi(\bar{y}, \bar{z}).\end{aligned}$$

(ii). Untuk setiap $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ berlaku

$$\varphi(\lambda\bar{x}, \bar{y}) = \textstyle\sum_{k=1}^{n} \lambda x_k y_k = \lambda x_1 y_1 + \dots + \lambda x_n y_n$$

$= \lambda(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)$

$= \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$

$= \lambda\varphi(\bar{x}, \bar{y})$, untuk $\lambda \in \mathbb{R}$.

(iii). Untuk setiap $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $\bar{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ berlaku

$$\varphi(\bar{x}, \bar{y} + \bar{z}) = \sum_{k=1}^{n} x_k(y_k + z_k) = x_1(y_1 + z_1) + \cdots + x_n(y_n + z_n)$$
$$= (x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n) + (x_1 z_1 + \cdots + x_n z_n)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(x_k + y_k) + \sum_{k=1}^{n}(x_k + z_k)$$
$$= \varphi(\bar{x}, \bar{y}) + \varphi(\bar{x}, \bar{z}).$$

(iv). Untuk setiap $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ berlaku

$$\varphi(\bar{x}, \lambda\bar{y}) = \sum_{k=1}^{n} x_k(\lambda y_k) = x_1(\lambda y_k) + \cdots + x_n(\lambda y_n)$$
$$= \lambda(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)$$
$$= \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

$= \lambda\varphi(\bar{x}, \bar{y})$, untuk $\lambda \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.2.2.3. Diberikan U dan V masing-masing ruang vektor atas lapangan yang sama. Didefinisikan $T: U \to V$ merupakan pemetaan linear dan $V = \mathcal{L}(W, \mathbb{C})$. Jika φ: $U \times V \to \mathbb{C}$ dengan $\varphi(x, f) = f\big(T(x)\big)$ untuk setiap $x \in U, f \in V = \mathcal{L}(W, \mathbb{C})$ maka φ merupakan fungsional bilinear pada $U \times V$.

Bukti:

(i). Untuk setiap $x, y \in U, f \in V = \mathcal{L}(W, \mathbb{C})$ berlaku

$$\varphi(x + y, f) = f\big(T(x + y)\big) = f\big(T(x) + T(y)\big)$$
$$= f\big(T(x)\big) + f\big(T(y)\big)$$
$$= \varphi(x, f) + \varphi(x, f).$$

(ii). Untuk setiap $x \in U, f \in V = \mathcal{L}(W, \mathbb{C})$ berlaku

$\varphi(\lambda x, f) = f\big(T(\lambda x)\big) = f\big(\lambda T(x)\big) = \lambda f\big(T(x)\big) = \lambda\varphi(x, f)$, untuk skalar λ.

(iii). Untuk setiap $x \in U, f, g \in V = \mathcal{L}(W, \mathbb{C})$ berlaku

$$\varphi(x, f + g) = (f + g)\big(T(x)\big) = f\big(T(x)\big) + g\big(T(x)\big) = \varphi(x, f) + \varphi(x, f).$$

(iv). Untuk setiap $x \in U, f \in V = \mathcal{L}(W, \mathbb{C})$ berlaku

$\varphi(x, \lambda f) = (\lambda f)\big(T(x)\big) = \lambda\Big(f\big(T(x)\big)\Big) = \lambda\varphi(x, f)$, untuk sebarang skalar λ.

Teorema 1.2.2.4. Diberikan U, Vdan W masing-masing ruang vektor atas lapangan yang sama. Didefinisikan $T: V \to W$ merupakan pemetaan linear dan $f \in \mathcal{L}(U, \mathbb{C})$.

Jika $\varphi: U \times V \rightarrow W$ dengan $\varphi(x, y) = (x)\big(T(y)\big)$ untuk setiap $x \in U, y \in V$ maka φ merupakan pemetaan bilinear.

Bukti:

(i). Untuk setiap $x_1, x_2 \in U, y \in V$ berlaku

$$\begin{aligned}\varphi(x_1+x_2, y) &= (x_1+x_2)\big(T(y)\big)\\ &= (x_1)\big(T(y)\big) + (x_2)\big(T(y)\big)\\ &= \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y).\end{aligned}$$

(ii). Untuk setiap $x \in U, y \in V$ berlaku

$\varphi(\lambda x, y) = (\lambda x)\big(T(y)\big) = \lambda(x)\big(T(y)\big) = \lambda\varphi(x, y)$, untuk sebarang skalar λ.

(iii). Untuk setiap $x \in U, y_1, y_2 \in V$ berlaku

$$\begin{aligned}\varphi(x, y_1+y_2) &= (x)\big(T(\, y_1+y_2)\big) = (x_1)(T(\, y_1) + T(\, y_2))\\ &= (x_1)\big(T(\, y_1)\big) + (x_2)\big(T(\, y_2)\big)\\ &= \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2).\end{aligned}$$

(iv). Untuk setiap $x \in U, y \in V$ berlaku

$\varphi(x, \lambda y) = (x)\big(T(\lambda y)\big) = (x)\big(\lambda T(y)\big) = \lambda(x)\big(T(y)\big) = \lambda\varphi(x, y)$, untuk sebarang skalar λ.

Teorema 1.2.2.5. Diberikan U, V, dan W masing-masing ruang vektor atas lapangan yang sama. Jika $\varphi: U \times V \rightarrow W$ dan $\psi: U \times V \rightarrow W$ dengan $\varphi = \psi$ jika $\varphi(x, y) = \psi(x, y)$ untuk setiap $x \in U$ dan $y \in V$ maka $\mathfrak{B}(U, V; W)$ merupakan ruang vektor terhadap operasi

$$(\varphi + \psi)(x, y) = \varphi(x, y) + \psi(x, y)$$

$$(\lambda\varphi)(x, y) = \lambda\varphi(x, y) \text{ untuk sebarang skalar } \lambda.$$

Bukti:

(i). Untuk setiap $\varphi, \psi \in \mathfrak{B}(U, V; W)$ dan $x \in U$, $y \in V$ berlaku

$$(\varphi + \psi)(x, y) = \varphi(x, y) + \psi(x, y) = \psi(x, y) + \varphi(x, y) = (\psi + \varphi)(x, y).$$

(ii). Untuk setiap $\varphi, \psi, \eta \in \mathfrak{B}(U, V; W)$ dan $x \in U$ dan $y \in V$ berlaku

$$\begin{aligned}(\varphi + (\psi + \eta))(x, y) &= \varphi(x, y) + (\psi + \eta)(x, y)\\ &= \varphi(x, y) + \psi(x, y) + \eta(x, y)\\ &= \big(\varphi(x, y) + \psi(x, y)\big) + \eta(x, y)\\ &= \big((\varphi + \psi)(x, y)\big) + \eta(x, y)\\ &= \big((\varphi + \psi) + \eta\big)(x, y).\end{aligned}$$

 ISSN 2089-855X

(iii). Terdapat $0 \in \mathfrak{B}(U,V;W)$ sehingga untuk setiap $\varphi \in \mathfrak{B}(U,V;W)$ dan $x \in U$ dan $y \in V$ berlaku $(\varphi + 0)(x,y) = \varphi(x,y) + 0(x,y) = \varphi(x,y)$.

(iv). Untuk setiap $\varphi \in \mathfrak{B}(U,V;W)$ terdapat $-\varphi \in \mathfrak{B}(U,V;W)$ sehingga berlaku

$$(\varphi + (-\varphi))(x,y) = \varphi(x,y) - \varphi(x,y) = 0(x,y),\ x \in U \text{ dan } y \in V.$$

(v). Untuk setiap $\varphi, \psi \in \mathfrak{B}(U,V;W)$ dan $x \in U$, $y \in V$ berlaku

$\lambda(\varphi + \psi)(x,y) = \lambda(\varphi(x,y) + \psi(x,y)) = \lambda\varphi(x,y) + \lambda\psi(x,y)$, untuk sebarang skalar λ.

(vi). Untuk setiap $\varphi \in \mathfrak{B}(U,V;W)$ dan $x \in U$, $y \in V$ berlaku

$(\lambda + \beta)\varphi(x,y) = (\lambda + \beta)\varphi(x,y) = \lambda\varphi(x,y) + \beta\varphi(x,y)$,

untuk sebarang skalar λ, β.

(vii). Untuk setiap $\varphi \in \mathfrak{B}(U,V;W)$ dan $x \in U$, $y \in V$ berlaku

$(\lambda\beta)\varphi(x,y) = \lambda\beta\varphi(x,y) = \lambda\big(\beta\varphi(x,y)\big)$, untuk sebarang skalar λ, β.

(viii). Untuk setiap $\varphi \in \mathfrak{B}(U,V;W)$ dan $x \in U$, $y \in V$ berlaku $1\varphi(x,y) = \varphi(x,y)$.

Teorema 1.2.2.6. (Hukum Parallelogram). Diberikan U dan V masing-masing ruang vektor atas lapangan yang sama. Jika $\varphi: U \times U \to V$ bilinear maka

$\varphi(x+y, x+y) + \varphi(x-y, x-y) = 2\varphi(x,x) + 2\varphi(y,y)$ untuk setiap $x, y \in U$.

Bukti:

Karena $\varphi: U \times U \to V$ bilinear untuk setiap $x, y \in U$ maka

$$\varphi(x+y, x+y) = \varphi(x,x) + \varphi(x,y) + \varphi(y,x) + \varphi(y,y) \quad \ldots\ldots. \quad (1)$$

dan

$$\begin{aligned}\varphi(x-y, x-y) &= \varphi\big(x + (-y), x + (-y)\big)\\ &= \varphi(x,x) + \varphi(x,-y) + \varphi(-y,x) + \varphi(-y,-y)\\ &= \varphi(x,x) + \varphi(x,(-1)y) + \varphi\big((-1)y, x\big) + \varphi\big((-1)y,(-1)y\big)\\ &= \varphi(x,x) - \varphi(x,y) - \varphi(y,x) + \varphi(y,y) \quad \ldots\ldots. \quad (2)\end{aligned}$$

Selanjutnya, persamaan (1) dan (2) dijumlahkan, maka diperoleh

$$\varphi(x+y, x+y) + \varphi(x-y, x-y) = 2\varphi(x,x) + 2\varphi(y,y).$$

Teorema 1.2.2.7. Diberikan U dan V masing-masing ruang vektor atas lapangan yang sama. Jika $\varphi: U \times U \to V$ bilinear maka

$\varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y) + i\varphi(x+iy, x+iy) - i\varphi(x-iy, x-iy) = \theta$,

untuk setiap $x, y \in U$.

Bukti:

Karena $\varphi: U \times U \to V$ bilinear untuk setiap $x, y \in U$ maka

$$\varphi(x+y, x+y) = \varphi(x,x) + \varphi(x,y) + \varphi(y,x) + \varphi(y,y) \quad \ldots\ldots. \quad (3)$$

$$-\varphi(x-y,x-y) = -\varphi(x,x) + \varphi(x,y) + \varphi(y,x) - \varphi(y,y) \quad .... \quad (4)$$

$$i\varphi(x+iy,x+iy) = i\varphi(x,x) - \varphi(x,y) - \varphi(y,x) - i\varphi(y,y) \quad .... \quad (5)$$

$$-i\varphi(x-iy,x-iy) = -i\varphi(x,x) - \varphi(x,y) - \varphi(y,x) + i\varphi(y,y) \quad .... \quad (6)$$

Selanjutnya, persamaan (3), (4), (5) dan (6) dijumlahkan, maka diperoleh

$\varphi(x+y,x+y) - \varphi(x-y,x-y) + i\varphi(x+iy,x+iy) - i\varphi(x-iy,x-iy) = \theta$,

untuk setiap $x, y \in U$.

F. Simpulan

Berdasarkan pembahasan, untuk U, Vdan W masing-masing ruang vektor atas lapangan yang sama diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Diketahui $T: U \to V$ pemetaan linear dan $V = \mathcal{L}(W, \mathbb{C})$. Jika $\varphi: U \times V \to \mathbb{C}$ dengan $\varphi(x,f) = f(T(x))$ untuk setiap $x \in U, f \in V = \mathcal{L}(W,\mathbb{C})$ maka φ merupakan fungsional bilinear pada $U \times V$.
2. Diketahui $T: V \to W$ pemetaan linear dan $f \in \mathcal{L}(U,\mathbb{C})$. Jika $\varphi: U \times V \to W$ dengan $\varphi(x,y) = (x)(T(y))$ untuk setiap $x \in U, y \in V$ maka φ merupakan pemetaan bilinear.
3. Jika $\varphi: U \times V \to W$ dan $\psi: U \times V \to W$ dengan $\varphi = \psi$ jika $\varphi(x,y) = \psi(x,y)$ untuk setiap $x \in U$ dan $y \in V$ maka $\mathfrak{B}(U,V,W)$ merupakan ruang vektor terhadap operasi

   $$(\varphi + \psi)(x,y) = \varphi(x,y) + \psi(x,y)$$

   $(\lambda\varphi)(x,y) = \lambda\varphi(x,y)$ untuk sebarang skalar λ.
4. Jika $\varphi: U \times U \to V$ bilinear maka

   $\varphi(x+y,x+y) + \varphi(x-y,x-y) = 2\varphi(x,x) + 2\varphi(y,y)$, untuk setiap $x, y \in U$.
5. Jika $\varphi: U \times U \to V$ bilinear maka

   $\varphi(x+y,x+y) - \varphi(x-y,x-y) + i\varphi(x+iy,x+iy) - i\varphi(x-iy,x-iy) = \theta$,

   untuk setiap $x, y \in U$.

Daftar Pustaka

Berberian, S.K., 1961. *Introduction to Hilbert Space*, Oxford University Press, New York.

Kreyszig, Erwin., 1978. *Introductory Functional Analysis with Application*, John Wiley & Sons, New York.

Saih Suwilo, dkk. 1997. *Aljabar Abstrak, Suatu Pengantar*, USU Press, Medan.

Soeparna Darmawijaya, 2006. *Pengantar Analisis Real*, Jurusan Matematika FMIPA Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

Soeparna Darmawijaya, 2007. *Pengantar Analisis Abstrak*, Jurusan Matematika FMIPA Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.