Delta-Pi: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika ISSN 2089-855X
Vol. 2, No. 2, Oktober 2013

ALJABAR LINTASAN LEAVITT SEDERHANA

Ida Kurnia Waliyanti
Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Khairun, Ternate
email: adhinku@gmail.com

ABSTRAK

Graf dapat direpresentasikan menjadi suatu aljabar lintasan atas lapangan K dengan menambahkan dua aksioma yang dinotasikan dengan KE. Apabila graf diperluas dan ditambahkan aksioma CK1 dan CK2 maka dapat didefinisikan aljabar lintasan Leavitt yang dinotasikan dengan $L(E)$. Pada kenyataannya KE merupakan sub aljabar dari $L(E)$. Aljabar lintasan Leavitt merupakan $\mathbb{Z}$-aljabar bertingkat yang ideal-ideal bertingkatnya dibangun oleh himpunan bagian titik-titik yang mempunyai sifat herediter dan tersaturasi. Selanjutnya melalui hubungan isomorfisma suatu K-aljabar, ideal-ideal ini dapat dikatakan sebagai aljabar lintasan Leavitt juga. Berkaitan dengan sifat sederhana elemen aljabar lintasan Leavitt yaitu elemen yang hanya memuat lintasan-lintasan dalam garis nyata atau garis hantu saja, dapat ditemukan syarat perlu dan cukup suatu graf membentuk aljabar lintasan Leavitt sederhana.

Kata kunci*:* graf, aljabar, aljabar lintasan, Leavitt, aljabar sederhana

A. Pendahuluan

Graf merupakan objek kombinatorial yang terdiri dari garis-garis (*edges*) dan titik-titik (*vertex*). Graf berarah dapat dipandang sebagai pasangan 4-*tupel* yang terdiri dari dua himpunan dan dua pemetaan. Himpunan yang dimaksud adalah himpunan titik dan himpunan garis. Sedangkan pemetaannya adalah pemetaan dari himpunan garis ke himpunan titik, yang masing-masing daerah hasilnya disebut sebagai sumber/asal (*source*) dan ujung/target (*range*) dari suatu garis dalam graf. Dengan didefinisikannya operasi perkalian pada himpunan semua lintasan dalam graf, himpunan ini mempunyai struktur semigrup. Selanjutnya untuk sebarang lapangan K dan graf E dapat didefinisikan suatu K-aljabar yang disebut dengan aljabar lintasan atas lapangan K pada E yang memiliki basis himpunan semua lintasan yang ada pada graf tersebut. Hal ini sejalan dengan pernyataan Passman (1977) dan Wisbauer (1991), bahwa apabila diberikan sebarang grup, bahkan semigrup terhadap operasi perkalian dan sebarang lapangan K, maka dapat didefinisikan K-aljabar asosiatif.

Aljabar lintasan merupakan aljabar atas lapangan dengan basis himpunan semua lintasan yang ada pada graf. Dalam hal ini graf dipandang secara aljabar, bukan sebagai objek kombinatorial. Selain itu graf dapat diperluas sehingga terbentuk graf baru yang disebut graf perluasan. Salah satu ide perluasan dilakukan oleh Leavitt dengan menambahkan adanya garis yang berlawanan arah dengan garis yang ada pada graf. Setiap garis yang ada pada graf akan berpasangan dengan garis baru yang dibentuk yang disebut dengan garis hantu. Dari sini dapat didefinisikan suatu aljabar lintasan atas lapangan pada graf perluasan, yang disebut dengan aljabar lintasan Leavitt.

Himpunan {0} dan aljabar itu sendiri merupakan ideal trivial dalam suatu aljabar. Aljabar yang hanya memuat ideal trivial disebut dengan aljabar sederhana. Dalam tulisan ini akan diselidiki apakah bentuk graf mempengaruhi sifat sederhana aljabar lintasan Leavitt yang dibentuk. Dengan kata lain akan diselidiki syarat apa saja yang harus dimiliki suatu graf sehingga terbentuk aljabar lintasan Leavitt sederhana.

Untuk menjawab permasalahan ini akan dibahas tentang ideal yang ada pada aljabar lintasan Leavitt, dengan terlebih dahulu dipelajari himpunan bagian dari titik-titik dalam suatu graf yang mempunyai sifat khusus, yaitu himpunan bagian herediter dan tersaturasi. Himpunan-himpunan bagian herediter dan tersaturasi ini akan membangun ideal dalam aljabar lintasan Leavitt.

B. Aljabar Lintasan

Sebelumnya harus diketahui terlebih dahulu mengenai definisi graf. Berikut diberikan pengertian tentang graf.

Definisi 2.1 *Graf* $E=(E^0,E^1,r,s)$ *merupakan* 4-*tupel yang memuat himpunan* E^0, E^1, *dan fungsi-fungsi* $s,r:E^1\to E^0$. *Anggota dari* E^0 *disebut titik dan anggota* E^1 *disebut garis. Untuk setiap garis e, s(e) adalah sumber (**source**) dari e, dan r(e) merupakan target/ujung (**range**) dari e.*

Graf yang dimaksud disini adalah graf berarah tanpa pembatasan banyaknya garis antara dua titik, tanpa pembatasan adanya *loop* dan atau sikel berarah. Dalam suatu graf terdapat lintasan yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.2 *Diberikan graf* $E=(E^0,E^1,\ r,s)$ *dan* $v,w\in E^0$. *Sebuah* ***lintasan*** *(**path**)* μ *dengan panjang* $l\geq 1$ *dengan sumber titik v dan ujung/target titik w (dengan kata lain lintasan* μ *berasal dari titik v menuju ke titik w) adalah barisan*

$$ve_1e_2...e_lw$$

dimana $e_k\in E^1$ *untuk setiap* $1\leq k\leq l$ *dan* $s(e_1)=v$, $r(e_k)=s(e_{k+1})$, *untuk setiap* $1\leq k\leq l$ *dan* $r(e_l)=w$. *Lintasan yang demikian dinotasikan sebagai* $\mu=e_1e_2...e_l$.

Himpunan semua lintasan dengan panjang n dinotasikan dengan E^n. Sedangkan semua lintasan yang ada dalam graf E dinotasikan dengan E^*. Diketahui bahwa dalam suatu graf terdapat titik dan garis, sehingga diberikan ketentuan bahwa untuk setiap titik $v \in E^0$ diasosiasikan dengan lintasan yang panjangnya 0 dan disebut sebagai lintasan trivial atau *stasioner*, sedangkan sebarang garis $e \in E^1$ diasosiasikan dengan lintasan yang panjangnya 1. Dengan demikian lintasan dengan panjang 0 dan 1 berkorespondensi satu-satu dengan elemen-elemen di E^0 dan E^1.

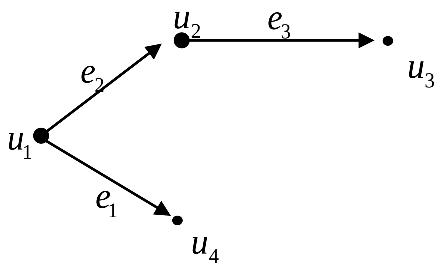
Suatu lintasan $\mu = e_1 e_2 ... e_l$ dengan $s(\mu) = s(e_1) = v$ dan $r(\mu) = s(e_l) = w$ untuk setiap $v, w \in E^0$, maka v dikatakan ***memancarkan*** (***emit***) μ dan w dikatakan ***menerima*** μ. Jika v tidak memancarkan sebarang garis dalam E^1, maka v dikatakan ***tenggelam*** (***sink***). Dengan kata lain v tenggelam jika dan hanya jika untuk setiap $e \in E^1$, $v \neq s(e)$.

Definisi 2.3 *Diberikan lapangan K dan graf* $E = (E^0, E^1, s, r)$. *Aljabar lintasan pada graf E atas lapangan K dinotasikan KE adalah K-aljabar yang sebagai K-ruang vektor mempunyai basis himpunan semua lintasan dalam E dan memenuhi syarat:*

1. $v_i v_j = \delta_{ij} v_i$ *untuk setiap* $v_i, v_j \in E^0$
2. $e_i = e_i r(e_i) = s(e_i) e_i$ *untuk setiap* $e_i \in E^1$

Contoh 2.41

1. Diberikan graf E berikut:



Gambar 1

Aljabar lintasan KE atas graf pada Gambar 1 memiliki basis $\{u_1, u_2, u_3, u_4, e_1, e_2, e_3, e_2 e_3\}$ Dimana setiap titik, garis, dan lintasannya dapat dinyatakan:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jika diasumsikan lapangan $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ maka tampak bahwa :

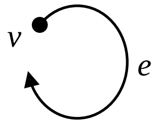
i. $\forall u_i, u_j \in E^0; u_i u_j = \delta_{ij} u_i$ dengan $\delta_{ij} = 1$ jika $i = j$ dan $\delta_{ij} = 0$ jika $i \neq j$.

ii. $\forall e_i \in E^1; e_i = e_i r(e_i) = s(e_i) e_i$ yaitu $e_1 = u_1 e_1 = e_1 u_4, e_2 = u_1 e_2 = e_2 u_2, e_3 = u_2 e_3 = e_3 u_3$

iii. Setiap elemen dalam KE merupakan kombinasi linear dari 8 matrik diatas.

Hal inilah yang menyimpulkan bahwa KE merupakan aljabar lintasan pada graf E atas lapangan $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$.

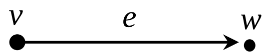
2. Diberikan graf E berikut.



Gambar 2

Aljabar lintasan atas lapangan K pada graf seperti Gambar 2 mempunyai basis $\{v, e, e^2, ..., e^l, ...\}$. Aljabar lintasan KE isomorf dengan aljabar polinomial $K[t]$ dengan *indeterminate t*.

3. Diberikan graf E berikut.



Gambar 3

Aljabar lintasan KE atas graf pada Gambar 3 mempunyai basis $\{v,w,e\}$. Aljabar ini isomorfis dengan aljabar matriks segitiga atas.

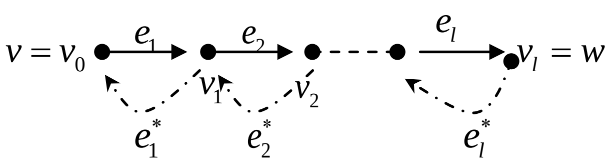
Aljabar lintasan pada suatu graf mempunyai sifat seperti dalam lemma berikut.

Lemma 2.5 *Diberikan graf E dan lapangan K. Maka pernyataan berikut benar:*

1. *KE adalah aljabar asosiatif*
2. *KE merupakan K-aljabar bertingkat.*
3. *KE mempunyai elemen satuan jika dan hanya jika E^0 berhingga*
4. *KE berdimensi hingga jika dan hanya jika E berhingga dan asiklis.*
5. *Jika E^0 tak berhingga maka KE merupakan K-aljabar dengan lokal unit.*

C. Pengertian dan Sifat-Sifat Aljabar Lintasan Leavitt

Graf dapat diperluas dengan cara membentuk garis baru (garis hantu) dari masing-masing garis yang terdapat dalam graf (garis nyata) tapi arahnya berlawanan. Misal e_i adalah garis nyata maka garis hantu dari e_i dinotasikan dengan e_i^*. Berikut ilustrasinya:



Gambar 5

Garis putus-putus merupakan garis hantu dari masing-masing garis nyata yang ada. Perluasan graf E menghasilkan aljabar lintasan yang disebut aljabar lintasan Leavitt. Ilustrasi diatas dapat dituliskan dalam definisi berikut.

Definisi 3.1 *Diberikan graf* $E = (E^0, E^1, s, r)$. *Perluasan graf E merupakan graf baru yang ditulis* $\widehat{E} = (E^0, E^1 \bigcup (E^1)^*, s', r')$ *dimana* $(E^1)^* = \left\{e_i^* : e_i \in E^1\right\}$ *dan fungsi r' dan s' didefinisikan sebagai:*

$r'\big|_{E^1} = r$; $s'\big|_{E^1} = s$; $r'(e_i^*) = s(e_i)$ *dan* $s'(e_i^*) = r(e_i)$

Selanjutnya akan diberikan definisi aljabar lintasan Leavitt atas lapangan K yang merupakan aljabar lintasan pada graf perluasan $\widehat{E}$.

Definisi 3.2 *Diberikan lapangan K dan graf berhingga E. Aljabar lintasan Leavitt dari graf E dengan koefisien dalam lapangan K didefinisikan sebagai aljabar lintasan pada graf perluasan* $\widehat{E}$ *yang memenuhi syarat* ***Cuntz-Krieger*** *berikut:*

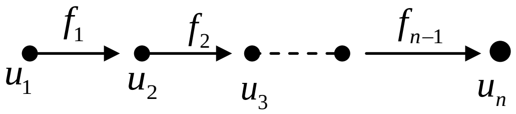
(CK1) $e_i^* e_j = \delta_{ij} r(e_j)$ *untuk setiap* $e_j \in E^1; e_i^* \in (E^1)^*$

(CK2) $v_i = \sum_{\left(e_j \in E^1; s(e_j) = v_i\right)} e_j e_j^*$ *untuk setiap* $v_i \in E^0$ *dengan* v_i *tidak tenggelam.*

Aljabar lintasan Leavitt ini dinotasikan L(E).

Berikut ini diberikan contoh aljabar lintasan yang merupakan aljabar lintasan Leavitt :

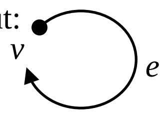
Contoh 3.3 Diberikan graf E berikut :



Gambar 6

Aljabar $K\hat{E}$ dengan E adalah graf pada Gambar 6 merupakan aljabar lintasan Leavitt $L(E)$ dan isomorfik dengan matrik aljabar $M_n(K)$.□

Contoh 3.4 Diberikan graf E berikut:



Gambar 7

Aljabar lintasan Leavitt atas graf diatas isomorfik $K\left[x, x^{-1}\right]$.

Selanjutnya elemen dalam aljabar lintasan Leavitt berbentuk polinomial dengan setiap monomialnya berbentuk sebagai berikut.

Lemma 3.5 *Setiap monomial dalam aljabar lintasan Leavitt L(E) berbentuk:*

1. $k_i v_i$ *dengan* $k_i \in K$ *dan* $v_i \in E^0$ *; atau*

2. $ke_{i_1} \dots e_{i_\sigma} e^*_{j_1} \dots e^*_{j_\tau}$ *di mana* $k \in K$ *;* σ, $\tau \geq 0$*;* $\sigma + \tau > 0$*;* $e_{i_s} \in E^1$ *dan* $e^*_{j_t} \in (E^1)^*$ *untuk* $0 \leq s \leq \sigma$, $0 \leq t \leq \tau$.

Menurut Definisi 2.3 dan Definisi 3.2 dapat dikatakan bahwa elemen dari $L(E)$ merupakan kombinasi linier dari elemen-elemen dalam $\{v : v \in E^0\} \cup \{e, e^* : e \in E^1\}$ dengan koefisien dari lapangan K. Misalkan diberikan dua lintasan dalam $L(E)$ dan dilakukan operasi perkalian diantara keduanya, maka sebagai akibat dari CK1 $\left(\beta^*\gamma = \delta_{\beta\gamma} r(\beta)\right)$ akan muncul beberapa kondisi, yaitu $\beta^*\gamma$ sebagai lintasan nyata, $\beta^*\gamma$ sebagai lintasan hantu, $\beta^*\gamma$ sebagai suatu titik, atau lintasan tersebut tidak terhubung (menyambung). Lebih jelasnya pernyataan ini akan disajikan dalam lemma berikut.

Lemma 3.6 *Jika E adalah suatu graf dan L(E) merupakan aljabar lintasan Leavitt, maka untuk suatu* $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in E^*$ *akan berlaku:*

$$(\alpha\beta^*)(\gamma\delta^*) = \begin{cases} \alpha\gamma'\delta^* & \text{, jika } \gamma = \beta\gamma' \\ \alpha\delta^* & \text{, jika } \beta = \gamma \\ \alpha\beta'^*\delta^* & \text{, jika } \beta = \gamma\beta' \\ 0 & \text{, yang lain} \end{cases}$$

Aljabar lintasan Leavitt mempunyai sifat yang serupa dengan sifat pada aljabar lintasan, seperti yang diberikan dalam Lemma 2.5. Selanjutnya akan diberikan sifat-sifat dari $L(E)$.

Lemma 3.7 *Diberikan graf E dan lapangan K serta L(E) aljabar lintasan Leavitt atas lapangan K. Pernyataan-pernyataan berikut berlaku: :*

1. *Jika himpunan titik* E^0 *berhingga maka L(E) merupakan K-aljabar unital*
2. *Jika himpunan titik* E^0 *tak berhingga maka L(E) merupakan K-aljabar dengan lokal unit (aljabar yang mempunyai elemen unit lokal)*
3. *Aljabar lintasan Leavitt L(E) merupakan* $\mathbb{Z}$*-aljabar bertingkat (*$\mathbb{Z}$*-graded algebra).*
4. *Sebarang himpunan dari lintasan-lintasan yang berbeda merupakan himpunan bebas linier dalam L(E).*
5. *Aljabar lintasan Leavitt merupakan K-aljabar berdimensi berhingga jika dan hanya jika graf E berhingga dan asiklis*.

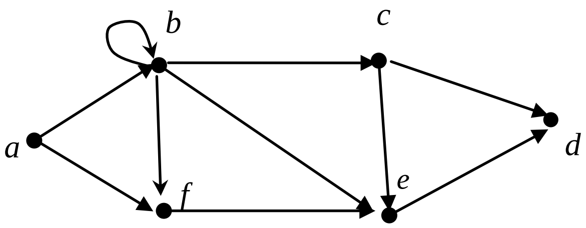
D. Himpunan Bagian Herediter Tersaturasi Suatu Graf

Titik suatu graf membentuk himpunan, yang didalamnya terdapat himpunan bagian yang mempunyai sifat khusus, yaitu herediter dan tersaturasi. Dalam pembahasanan selanjutnya akan dihubungkan dengan ideal aljabar lintasan atas graf tersebut. Untuk sebarang graf E, himpunan lintasan yang panjangnya n, untuk $n \geq 2$, dinotasikan E^n dan $E^* = \bigcup_{n \geq 0} E^n$ merupakan himpunan semua lintasan dalam graf E. Kemudian didefinisikan suatu relasi "$\geq$" dalam E^0, yaitu $(\forall v, w \in E^0)$, $v \geq w$, jika terdapat $\mu \in E^*$ dengan $s(\mu) = v$ dan $r(\mu) = w$.

Definisi 4.1 *H himpunan bagian dari* E^0 *dikatakan herediter jika* $\left(\forall v, w \in E^0\right)$ $v \geq w, v \in H \Rightarrow w \in H$. *Himpunan bagian* H *dari* E^0 *dikatakan tersaturasi jika* $\left(\forall v \in E^0\right) s^{-1}(v) \neq \emptyset$ *dan* $r(s^{-1}(v)) \subseteq H \Rightarrow v \in H$.

Kondisi tersebut dapat digambarkan dengan contoh berikut:

Contoh 4.2



Gambar 8

Dari gambar di atas diperoleh $\{c,d,e,f\}$ merupakan himpunan bagian yang herediter dan tersaturasi, $\{b,c,d,e,f\}$ herediter tapi tidak saturasi, $\{a,b,c,f\}$ tersaturasi tapi tidak herediter dan $\{b,c,f\}$ tidak herediter sekaligus tidak tersaturasi.

Suatu himpunan bagian H dari E^0 yang herediter tersaturasi merupakan suatu himpunan bagian dari E^0 yang herediter dan juga tersaturasi. Koleksi dari semua himpunan yang memenuhi sifat herediter dan sekaligus tersaturasi dinotasikan dengan □ Suatu himpunan bagian dari E^0 yang herediter tersaturasi secara trivial adalah himpunan kosong dan E^0 sendiri.

Selanjutnya dengan menggunakan operasi perkalian elemen dalam $L(E)$ seperti yang dijelaskan dalam Lemma 3.6 akan dibahas mengenai bentuk ideal bertingkat dalam aljabar lintasan Leavitt, yang dibangun oleh himpunan bagian E^0. Terlebih dahulu didefinisikan suatu ideal yang dibangun oleh H yang merupakan kombinasi linear dari monomial-monomial yang melewati titik di H. Kemudian akan ditunjukkan pembentukkan ideal bertingkat dalam $L(E)$, sebagaimana diterangkan dalam lemma berikut ini.

Lemma 4.3 *Diberikan graf E. Himpunan H adalah himpunan bagian dari* E^0 *yang herediter tetapi tidak harus tersaturasi. Ideal yang dibangun oleh H adalah*

$$I(H) = \left\{ \sum k\alpha\beta^* \,\middle|\, k \in K, \alpha, \beta \in E^*, r(\alpha) = r(\beta) \in H \right\}$$

yang merupakan ideal bertingkat.

Lemma 4.3 menjelaskan mengenai ideal yang dibentuk dari himpunan bagian herediter dari E^0. Tapi selain herediter juga terdapat himpunan bagian dari E^0 yang tersaturasi, yang mana juga membangun suatu ideal di $L(E)$. Ternyata titik-titik dalam suatu ideal juga membentuk himpunan bagian herediter dan tersaturasi di E^0. Pernyataan ini diperjelas dalam lemma berikut.

Lemma 4.4 *Untuk setiap ideal I dari aljabar lintasan Leavitt L(E),* $I \cap E^0$ *merupakan himpunan bagian herediter dan tersaturasi dari* E^0.

Lemma 4.3 dan Lemma 4.4 mendasari pengertian bahwa setiap ideal bertingkat dari suatu aljabar lintasan Leavitt dibangun oleh himpunan bagian titik-titik yang herediter dan tersaturasi. Padahal himpunan titik-titik suatu graf merupakan elemen idempoten di $L(E)$. Dengan demikian suatu ideal bertingkat J di $L(E)$ merupakan ideal yang dibangun oleh elemen idempoten.

Uraian di atas banyak membahas tentang ideal bertingkat di $L(E)$. Hal ini memotivasi untuk menyelidiki apakah setiap ideal bertingkat dari suatu aljabar lintasan Leavitt juga merupakan aljabar lintasan Leavitt. Untuk itu akan diberikan suatu lemma yang berhubungan dengan ideal bertingkat tersebut. Sebelumnya akan didefinisikan mengenai bentuk sederhana elemen dalam $L(E)$. Hal ini termotivasi dari pernyataan dalam Lemma 3. 5 mengenai bentuk monomial dalam $L(E)$. Jika monomial tersebut hanya memuat garis-garis nyata atau hanya memuat garis-garis hantu maka akan membentuk elemen $L(E)$ dalam bentuk sederhana.

Definisi 4.5 *Dikatakan bahwa* $x \in L(E)$ *merupakan polinomial dalam semua garis nyata jika:*

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k, \lambda_k \in K, \alpha_k \in E^*.$$

Elemen $x \in L(E)$ *merupakan polinomial dalam semua garis hantu jika:*

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \beta_k^*, \lambda_k \in K, \beta_k \in E^*.$$

Selanjutnya diberikan suatu involusi linier sebagai fungsi kebalikan, yang didefinisikan sebagai berikut.

Lemma 4.6 *Jika E adalah suatu graf dan* $L(E)$ *aljabar lintasan Leavitt, dapat didefinisikan sebuah involusi linear* $x \to \overline{x}$ *pada* $L(E)$ *sebagai berikut:*

1. $\overline{k_i v_i} = k_i v_i, k_i \in K, v_i \in E^0,$
2. $\overline{k e_{i_1} \ldots e_{i_\sigma} e_{j_1}^* \ldots e_{j_\tau}^*} = k e_{j_\tau} \ldots e_{j_1} e_{i_\sigma}^* \ldots e_{i_1}^*, k_i \in K, \sigma, \tau \geq 0, \sigma + \tau > 0, e_{i_s}, e_{j_t} \in E^1,$

Dengan menggunakan involusi linier pada Lemma 4.6 dapat dibentuk graf baru. Lebih jelasnya dapat disajikan dalam definisi berikut.

Definisi 4.7 *Diberikan graf E dan* $\emptyset \neq H \in \boldsymbol{H}_E$. *Didefinisikan*

$F_E(H) = \left\{ \alpha = (\alpha_1 ... \alpha_n) \in E^n \middle| n \geq 1, s(\alpha_1) \in E^0 \setminus H, r(\alpha_i) \in E^0 \setminus H (\forall i < n), r(\alpha_n) \in H \right\}$

Kemudian diberikan $\overline{F_E(H)} = \left\{ \overline{\alpha} \middle| \alpha \in F_E(H) \right\}$. *Selanjutnya didefinisikan graf baru* ${}_HE = \left({}_HE^0, {}_HE^1, s', r' \right)$ *dengan:*

1) ${}_HE^0 = H \cup F_E(H)$
2) ${}_HE^1 = \left\{ e \in E^1 \middle| s(e) \in H \right\} \cup \overline{F_E(H)}$
3) $\left(\forall e \in E^1 \right) s(e) \in H, s'(e) = s(e)$ dan $r'(e) = r(e)$
4) *Untuk setiap* $\overline{\alpha} \in \overline{F_E(H)}, s'(\overline{\alpha}) = \alpha$ dan $r'(\overline{\alpha}) = r(\alpha)$

Graf baru yang terbentuk yaitu ${}_HE = \left({}_HE^0, {}_HE^1, s', r' \right)$, dapat mendefinisikan aljabar lintasan Leavitt yang dinotasikan dengan $L({}_HE)$. Bagian sebelumnya telah dikemukakan mengenai ideal yang dibangun oleh *H*, yang dinotasikan dengan *I(H)*. Jika dihubungkan dengan graf yang baru saja dibentuk, didapat hubungan yang disajikan dalam lemma berikut ini.

Lemma 4.8 *Diberikan graf E. Untuk setiap H, himpunan bagian* E^0 *yang herediter dan saturasi, ideal I(H) isomorfis dengan* $L\left({}_HE \right)$.

Pembuktiannya ditunjukkan dengan membentuk pemetaan ϕ, yang didefinisikan:

i. $\left(\forall v \in H \right) \phi(v) = v$

ii. $\left(\forall \alpha \in F_E(H) \right) \phi(\alpha) = \alpha\alpha^*$

iii. $\left(\forall e \in E^1 \right) \left(s(e) \in H \right) \phi(e) = e$ dan $\phi(e^*) = e^*$

iv. $\left(\forall \overline{\alpha} \in \overline{F_E(H)} \right) \phi(\overline{\alpha}) = \alpha$ dan $\phi(\overline{\alpha^*}) = \alpha^*$

Untuk menjelaskan Lemma 4.8 perhatikan Gambar 8. Ideal yang dibangun oleh *H* merupakan kombinasi linier dari lintasan-lintasan yang melewati titik-titik dalam *H*. Padahal $L\left({}_HE \right)$ merupakan aljabar lintasan Leavitt atas graf baru ${}_HE = \left({}_HE^0, {}_HE^1, s', r' \right)$ dengan menganggap *H* sebagai suatu titik. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa ideal yang dibangun oleh himpunan bagian herediter dan tersaturasi akan membentuk aljabar lintasan Leavitt.

E. Lintasan Tertutup

Setiap graf pasti mempunyai lintasan. Lintasan yang bersumber dan berujung pada satu titik yang sama disebut sebagai lintasan tertutup.

Definisi 5.1 *1. Garis e disebut **jalan keluar (exit)** dalam lintasan* $\mu = \mu_1 \dots \mu_n$ *jika terdapat i sedemikian hingga* $s(e) = s(\mu_i)$ *dan* $e \neq \mu_i$.

*2. Sebuah **lintasan tertutup berbasis di v** adalah suatu lintasan* $\mu = \mu_1 \dots \mu_n$ *dengan* $\mu_j \in E^1$, $n \geq 1$ *sedemikian hingga* $s(\mu) = r(\mu) = v$. *Himpunan semua lintasan yang demikian dinotasikan dengan CP(v).*

*3. Sebuah **lintasan tertutup sederhana berbasis di v** adalah lintasan tertutup yang berbasis di v,* $\mu = \mu_1 \dots \mu_n$, *sedemikian hingga untuk setiap* $j > 1$, $s(\mu_j) \neq v$. *Himpunan semua lintasan yang demikian dinotasikan dengan CSP(v).*

Berdasar Definisi 5.1 dapat dikatakan bahwa setiap sikel merupakan lintasan tertutup sederhana yang berbasis di semua titiknya, tapi tidak setiap lintasan tertutup sederhana yang berbasis di *v* merupakan sikel, karena dalam lintasan tertutup sederhana yang berbasis di *v* dapat melewati titik-titik yang sama lebih dari satu kali. Sedangkan setiap lintasan tertutup sederhana merupakan lintasan tertutup tapi tidak sebaliknya.

Lintasan-lintasan tertutup dalam suatu graf memenuhi relasi CK1 dan dapat dilihat dalam lemma berikut.

Lemma 5.2 *Untuk setiap* $\mu, \upsilon \in CSP(v)$ *berlaku* $\mu^* \upsilon = \delta_{\mu v} \upsilon$.

Dengan demikian lintasan-lintasan tertutup sederhana memenuhi sifat CK1, seperti halnya garis-garis dan lintasan yang lain. Selanjutnya akan diberikan lemma yang menjelaskan hubungan lintasan tertutup dan tertutup sederhana.

Lemma 5.3 *Untuk setiap* $p \in CP(v)$ *terdapat dengan tunggal* $c_1, \dots, c_m \in CSP(v)$ *sedemikian hingga* $p = c_1 \dots c_m$.

Berkenaan dengan hubungan *CP*(*v*) dan *CSP*(*v*) tersebut dalam Lemma 5.3, muncul definisi derajat pengembalian yang menjelaskan banyaknya elemen *CSP*(*v*) sebagai pembentuk suatu elemen di *CP*(*v*).

Definisi 5.4 *Diberikan* $p \in CP(v)$, *didefinisikan **derajat pengembalian (return degree)** di v dari p yaitu banyaknya* $m \geq 1$ *sedemikian hingga untuk* $c_1, \dots, c_m \in CSP(v)$, $p = c_1 \dots c_m$. *Derajat pengembalian dinotasikan dengan* $RD(p) = RD_v(p) = m$. *Pengertian ini diperluas untuk titik-titik* $v \in E^0$ *dengan ketentuan* $RD_v(v) = 0$, *dan untuk kombinasi linier tak nol berbentuk* $\sum k_s p_s$, *dimana* $p_s \in CP(v) \bigcup \{v\}$ *dan* $k_s \in K - \{0\}$ *dinotasikan dengan* $RD\left(\sum k_s p_s\right) = maks\left\{RD(p_s)\right\}$.

 ISSN 2089-855X

Derajat pengembalian dari lintasan dalam *CSP(v)* adalah satu. Demikian juga untuk sikel, karena merupakan lintasan tertutup sederhana yang berbasis di semua titik yang dilewatinya. Lemma 5.2 dan 5.3 hanya menjelaskan hubungan lintasan tertutup dan tertutup sederhana, padahal masih ada lintasan tertutup lainnya yaitu sikel. Dengan mengaitkan definisi jalan keluar dalam suatu lintasan tertutup dapat dilihat sifat-sifatnya.

Lemma 5.5 *Diberikan grap E. Kondisi berikut akan saling ekuivalen:*

1. *Setiap sikel mempunyai jalan keluar.*
2. *Setiap lintasan tertutup mempunyai jalan keluar.*
3. *Setiap lintasan tertutup sederhana mempunyai jalan keluar.*
4. *Untuk setiap* $v_i \in E^0$, *jika* $CSP(v_i) \neq \emptyset$, *maka terdapat* $c \in CSP(v_i)$ *yang mempunyai jalan keluar.*

Demikian telah diberikan sifat-sifat lintasan tertutup yang terdapat dalam suatu graf. Sifat-sifat ini akan digunakan untuk mempelajari sifat sederhana (simplisitas) dalam aljabar lintasan Leavitt.

F. Simplisitas dalam Aljabar Lintasan Leavitt

Akhir dari pembahasan dalam tulisan ini adalah syarat perlu dan cukup suatu graf membentuk aljabar lintasan Leavitt sederhana. Namun sebelum dibahas hal tersebut harus dipelajari dulu mengenai beberapa kasus berkaitan dengan sifat kesederhanannya (simplisitasnya). Misalnya polinomial-polinomial yang hanya memuat garis nyata atau garis hantu saja. Sebelumnya akan diberikan dulu proposisi-proposisi yang berkenaan dengan elemen-elemen sederhana yaitu polinomial yang hanya memuat garis-garis nyata saja.

Proposisi 6.1 *Diberikan graf E dengan sifat bahwa setiap sikelnya mempunyai jalan keluar. Jika* $\alpha \in L(E)$ *merupakan polinomial yang hanya memuat garis nyata saja dengan* $deg(\alpha) > 0$, *maka terdapat* $a, b \in L(E)$ *sedemikian hingga* $a\alpha b \neq 0$ *merupakan polinomial yang hanya memuat garis nyata dan* $deg(a\alpha b) < deg(\alpha)$.

Secara garis besar Proposisi 6.1 mengatakan bahwa jika diberikan elemen dalam $L(E)$ yang hanya memuat garis nyata saja pasti akan ditemukan dua elemen $L(E)$ lainnya sedemikian hingga jika ketiga elemen tersebut dioperasikan dapat ditemukan elemen $L(E)$ yang hanya memuat garis nyata dengan derajat lebih rendah. Bahkan hasil perkalian ketiga elemen tadi dapat menghasilkan elemen dalam E^0, atau berupa titik.

 ISSN 2089-855X

Sehingga irisan suatu ideal J dalam $L(E)$ yang hanya memuat garis nyata dengan E^0 tidak kosong. Pernyataan ini merupakan akibat yang muncul dari Proposisi 6.1 dan untuk lebih jelasnya dinyatakan dalam Akibat 6.2 dan Akibat 6.3 berikut ini.

Akibat 6.2 *Diberikan graf E dengan sifat bahwa setiap sikelnya mempunyai jalan keluar. Jika* $\alpha \neq 0$ *merupakan polinomial yang hanya berupa garis nyata saja maka terdapat* $a, b \in L(E)$ *sedemikian hingga* $a\alpha b \in E^0$.

Akibat 6.3 *Diberikan graf E dengan sifat bahwa setiap sikelnya mempunyai jalan keluar. Jika J adalah ideal dari L(E) dan memuat polinomial tak nol yang hanya berupa garis nyata saja, maka* $J \cap E^0 \neq \emptyset$.

Berdasarkan Proposisi 6.1 beserta akibat-akibat yang mengikutinya, muncul pemikiran apakah sifat tersebut juga berlaku pada polinomial-polinomial yang hanya memuat garis hantu. Akan digunakan involusi linier pada Lemma 4.6 untuk memetakan elemen nyata ke dalam elemen hantu. Seiring dengan involusi yang diberikan muncul proposisi yang berkenaan dengan polinomial yang hanya memuat garis hantu berikut.

Proposisi 6.4 *Diberikan graf E dengan sifat bahwa setiap sikelnya mempunyai jalan keluar. Jika* $\alpha \in L(E)$ *merupakan polinomial yang hanya memuat garis hantu dengan* $deg(\overline{\alpha}) > 0$, *maka terdapat* $a, b \in L(E)$ *sedemikian hingga* $a\alpha b \neq 0$ *merupakan polinomial yang hanya memuat garis hantu dan* $deg(\overline{a\alpha b}) < deg(\overline{\alpha})$.

Seperti halnya dalam polinomial yang hanya memuat garis nyata, polinomial yang hanya memuat garis hantu juga mempunyai sifat berikut:

Akibat 6.5 *Diberikan graf E dengan sifat bahwa setiap sikelnya mempunyai jalan keluar. Jika* $\alpha \neq 0$ *merupakan polinomial yang hanya berupa garis hantu maka terdapat* $a, b \in L(E)$ *sedemikian hingga* $a\alpha b \in E^0$.

Akibat 6.6 *Diberikan graf E dengan sifat bahwa setiap sikelnya mempunyai jalan keluar. Jika J adalah ideal dari L(E) dan memuat polinomial tak nol yang hanya berupa garis hantu, maka* $J \cap E^0 \neq \emptyset$.

Selanjutnya dengan menggunakan sifat-sifat pada polinomial yang hanya memuat garis nyata dan garis hantu yang dihubungkan dengan sifat herediter dan tersaturasi akan muncul akibat berikut.

Akibat 6.7 *Diberikan graf E dengan sifat:*

1. *Himpunan bagian* E^0 *yang hediter dan tersaturasi hanya* $\emptyset$ *dan* E^0
2. *Setiap sikel di E mempunyai jalan keluar*

Jika ideal tak nol J dari $L(E)$ *memuat polinomial yang hanya dalam garis nyata saja (atau yang hanya memuat garis hantu saja) maka* $J = L(E)$.

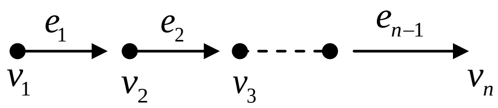
Telah dibahas mengenai lintasan tertutup sampai sifat pada bentuk sederhana suatu elemen yang hanya memuat garis nyata atau garis hantu saja. Selanjutnya akan dikaji mengenai syarat perlu dan cukup suatu graf membentuk aljabar lintasan Leavitt sederhana, yang disajikan dalam teorema berikut.

Teorema 6.8 *Diberikan graf berhingga E. Aljabar Lintasan Leavitt* $L(E)$ *merupakan aljabar sederhana jika dan hanya jika memenuhi kondisi berikut:*

1. *Himpunan bagian* E^0 *yang hediter dan tersaturasi hanya* $\varnothing$ *dan* E^0
2. *Setiap sikel di E mempunyai jalan keluar*

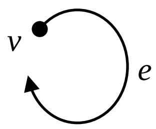
Teorema 6.8 merupakan hasil utama dalam penulisan ini. Selanjutnya akan diberikan contoh graf yang mendefinisikan aljabar lintasan Leavitt sederhana dan yang tidak.

Contoh 6.9 *Contoh graf yang mendefinisikan aljabar lintasan Leavitt sederhana*:

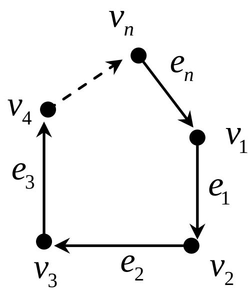


Gambar 9

Contoh 6.10 *Contoh graf yang mendefinisikan aljabar lintasan Leavitt yang tidak sederhana*:



Gambar 10



Gambar 11

Dengan demikian graf mempengaruhi sifat simplisitas/kesederhanaan aljabar lintasan Leavitt yang didefinisikannya. Dari pembahasan-pembahasan sebelumnya, suatu graf *E* dapat mendefinisikan aljabar lintasan dan aljabar lintasan Leavitt. Aljabar lintasan dibangun dari lintasan-lintasan yang ada pada graf *E*. Artinya, lintasan-lintasan tersebut hanya memuat garis-garis nyata. Sedangkan aljabar lintasan Leavitt dibangun oleh lintasan-lintasan yang memuat garis-garis nyata dan atau garis-garis hantu. Artinya terdapat lintasan yang hanya memuat garis-garis hantu saja. Dengan demikian aljabar lintasan merupakan bagian dari aljabar lintasan Leavitt atau dinotasikan $KE \subset L(E)$. Lemma berikut memperjelaskan hubungan aljabar lintasan dan aljabar lintasan Leavitt.

Lemma 6.11 *Diberikan graf E. Aljabar KE merupakan aljabar lintasan atas lapangan K pada graf E. Aljabar L(E) merupakan aljabar lintasan Leavitt atas lapangan K pada graf E. Aljabar KE merupakan sub aljabar dari aljabar L(E).*

G. Kesimpulan

Aljabar lintasan merupakan sub aljabar dari aljabar lintasan Leavitt yang elemennya dibangun dari lintasan-lintasan yang hanya memuat garis nyata. Aljabar lintasan Leavitt merupakan $\mathbb{Z}$-aljabar bertingkat yang ideal-ideal bertingkatnya dibangun oleh himpunan bagian titik-titik yang mempunyai sifat herediter dan tersaturasi. Ideal bertingkat ini juga membentuk aljabar lintasan Leavitt. Selanjutnya dengan menggunakan sifat sederhana dari suatu graf dan graf perluasan dapat disimpulkan bahwa syarat perlu dan cukup suatu graf membentuk aljabar lintasan Leavitt sederhana adalah apabila graf tersebut bersifat setiap sikelnya mempunyai jalan keluar dan himpunan bagian dari titik-titiknya yang herediter dan tersaturasi hanya himpunan kosong dan himpunan semua titik itu sendiri.

Daftar Pustaka

Abrams, G., and Pino, G.A., 2005, Leavitt Path Algebra of a Graph, *J. Algebra* 293 (2), 319 – 334.

Abrams, G., and Pino, G.A., 2006, Purely infinite simple Leavitt Path Algebra of a Graph, *J. Pure Appl.Algebra* 207, 553-563.

Abrams, G., and Pino, G.A., 2008, The Leavitt Path Algebra of Arbitrary Graph, *Hauston J. Math*. 34 (2), 423-442.

Adkins, W., and Weintraub, S. H., 1992, *Algebra: An Approach via Module Theory*, Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg

Assem, I., Simson, D. & Skowronski, A., 2005, *Elemens of the Representation Theory of Associative Algebras*, London Math.Soc Student Text 65. Cambridge University Press.

Dummit, D.S., and Foote, R.M., 2004, *Abstract Algebra, Third Edition*, John Wiley & Sons, United State of America.

Fraleigh, J.B., 2000, *A First Course in Abstract Algebra, Sixth Edition*, Addition-Wesley Puplising Compeny, Inc,

Passman, D., 1977, *The Algebraic Structure of Group Rings*, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Son, New York

Pino, G.A., 2005, On Maximal Left Quotient Systems and Leavitt Path Algebras, *Tesis Doctoral*, Univesidad de Malaga

Pino, G.A., and Pardo, E., 2008, Stable rank of Leavitt path algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 136 no. 7, 2375-2386.

Rotman, J., 2003, *Advanced Modern Algebra,* Prentice Hall, New York .

Tomforde, M., 2007, Uniquenese Theorems and Ideal Structure for Leavitt Algebras, *J. Algebra,* 318, 270-299.

Wisbauer, R., 1991, *Foundation of Module and Ring Theory*, University of Dusseldorf, Dusseldorf

Wisbauer, R., 1996, *Modules and Algebra: Bimodul Structure and Group Actions On Algebras*, Addison Wesley Longman Inc, Dusseldorf