Delta-Pi: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika
E-ISSN : 2541-2906
Vol. 10 No.1, 2021

Representasi Pola Penurunan Luas Lingkaran Dengan Menggunakan Figural-Geometris-Analitis

Wahid Umar[1], In H. Abdullah[2], Bety Miliyawati[3]

[1]Program Studi PGSD, Universitas Khairun
[2]Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Khairun
[3]Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Subang

Abstrak. Artikel ini merupakan studi literature yang bertujuan untuk mendeskripsikan cara representasi pola penurunan rumus luas lingkaran dengan menggunakan figural-geometri-analitis. Melalui beberapa bangun datar geometri elementer dapat di representasikan pola penurunan rumus luas lingkaran (juring) dengan komponen-komponen lingkaran yang dihasilkan dari pembagian menurut garis tengah lingkaran. Juring-juring lingkaran (*sering diwakili segitiga sama kaki*) disusun melalui proses *figural-geometris* hingga membentuk bangun datar geometri elementer seperti *persegi panjang*, *jajargenjang, segitiga*, dan *trapesium*. Sesuai bentuk bangun datar geometri elementer yang terbentuk, diturunkan rumus luas lingkaran ($L=\pi r^2$) dari dan dengan menghitung luas bangun datar elementer yang terbentuk melalui proses analisis-geometris, sampai setiap bangun elementer yang terbentuk menghasilkan luas yang sama, yakni sebesar πr^2. Kemudian pada bagian akhir dicoba dicari hubungan antara jumlah juring yang diperoleh melalui pembagian menurut garis tengah lingkaran (juring berjumlah: 2,4,8,16,32,64,…,2n; n = 1,2,3,..) dengan jenis bangun datar elementer yang dapat disusun darinya (termasuk yang tidak dapat disusun), serta merangkum sejumlah sifat tertentu yang dapat ditarik dari hubungan yang terjadi. Dengan cara ini, siswa mudah merepresentasikan pemahaman matematika yang dipelajarinya

Untuk dapat mengetahui/memahami materi bagun datar geometri elementer khususnya representasi pola penurunan rumus luas lingkaran yang dipelajari, maka perlu mempresentasikan beberapa konsep terkait bangun datar geometri yang dapat menurunkan rumus luas lingkaran, dan dimengerti oleh siswa. Dengan demikian representasi menjadi urgen baik sebagai alat komunikasi maupun alat berpikir matematis. Melalui kajian ini, diharapkan dapat memperkaya khasana pengetahuan matematika khusunya cara menurunkan rumus luas lingkaran dengan bantuan beberapa bangun datar elementer.

Kata Kunci: *Bangun Datar, Juring, Luas Lingkaran, Representasi*

A. Pendahuluan

Materi geometri bangun datar di sekolah merupakan salah satu materi yang di ajarkan di sekolah. Materi bangun datar bermanfaat langsung dalam kehidupan sehari-hari siswa. Guru biasanya mengajarkan materi bangun datar dengan menggunakan model-model alat peraga real. Walaupun ada juga guru yang masih menggunakan papan tulis untuk menerangkan materi bangun datar. Pengajaran materi bangun datar dengan menggunakan papan tulis, dilihat dari efektifitas waktu bisa dianggap lebih efektif dibandingkan dengan penggunakan model-model alat peraga real, tetapi hal tersebut bisa berakibat munculnya salah konsep (*misconception*) dalam pemahaman materi bangun datar.

Untuk bangun datar 'lingkaran' menurut pendapat Ruseffendi (2012), adalah salah satu bangun datar yang paling fundamental dan paling sederhana bentuknya dalam geometri *euclids* dimensi dua. Ruseffendi, lebih jauh mengungkapkan bahwa bangun datar geometri yang *sangat kaya* dengan berbagai konsep, prinsip dan pengertian geometris, bahkan konsep dan prinsip-prinsipnya mengagumkan. Nilai-nilai yang terkandung di dalamnya, selalu tersedia untuk *disumbangkan* bagi siapa saja yang berminat mempelajarinya. Sejak ribuan tahun, lingkaran beserta komponen dan parameternya telah banyak dibahas orang, tetapi sering hal itu tidak terlalu jelas bagi kebanyakan siswa sekolah dasar-menengah. Hal ini mungkin disebabkan karena materi lingkaran itu sendiri termuat dalam domain induk yang bernama geometri, suatu bidang matematika yang tidak banyak mendapat perhatian. Dari hasil pengamatan yang dilakukan oleh penulis pada beberapa sekolah dasar di Kota Tidore Kepulauan maupun di Kota Ternate ditemukan bahwa pembelajaran lingkaran yang dilakukan oleh guru-guru matematika SD yakni hanya dikenal dan diajarkan bagaimana siswa dapat menyelesaikan masalah dengan menggunakan rumus luas dan keliling lingkaran, sehingga pemahaman siswa terhadap materi yang disampaikan hanya pada tataran permukaan saja, dengan kata lain bahwa konsep–konsep berharga yang termuat di dalam lingkaran tidak sempat tergali. Hal ini mungkin disebabkan kurangnya kesempatan bagi guru untuk melakukan eksplorasi lebih mendalam, serta karena terganjal dengan tugas *mengejar target kurikulum* yang harus diselesaikan oleh guru.

Lebih jauh, bahwa pembelajaran bagun datar lingkaran sampai saat ini hanya sebatas mengerjakan soal-soal seperti menghitung luas, keliling dan jari-jari lingkaran (di SD dan SMP), atau lebih lanjut analisis menentukan persamaan lingkaran (di SMA), sesuai kurikulum. Hal ini berakibat akan berselang beberapa waktu sesudah itu, siswa tidak lagi mengingat apa-apa yang telah dipelajarinya, karena konsep-konsep yang diterimanya jarang tertanam dengan baik di dalam memori siswa. Pekerjaan rutin-mekanis dalam belajar seperti banyak terlaksana sekarang ini, sering tidak memberi manfaat permanen bagi siswa, dibanding hal itu pada pelajaran lain yang lebih mengutamakan praktik atau kompetensi motoris. Gagasan ini sesuai dengan teori belajar matematika dari *Brownell* yang menganjurkan belajar bermakna dan berpengertian. Senada dengan itu, *teori gestalt* menganjurkan siswa agar lebih banyak melakukan latihan (*drill*), tetapi dengan syarat apabila konsep-konsep dan atau pengertiannya dipelajari lebih dulu hingga tertanam pada diri siswa (Ruseffendi, 2012).

Lingkaran memuat sejumlah unsur beserta hubungan antar unsur di dalamnya, mulai dari hubungan yang sederhana sampai dengan hubungan yang kompleks. Unsur lingkaran menyangkut *titik pusat, jari-jari, diameter, busur, tali busur, tembereng, juring*, dan *apotema*, kesemuanya memiliki hubungan dan makna yang tidak sedikit. Disamping konsep bilangan π yang *misterius*, serta kaitannya yang alami dengan keliling dan jari-jari lingkaran, maka representasi penurunan rumus lingkaran tidak kalah penting dalam menyumbang kekuatan berpikir analisis dan sintesis bagi siswa di sekolah dasar dan menengah. Penurunan rumus lingkaran memang berada pada banyak pendekatan dan tingkat kompleksitas yang berbeda-beda. Hal ini dalam pembelajarannya, dapat disesuaikan dengan tingkat intelektual siswa sesuai anjuran teori perkembangan intelektual dari Piaget (Subanji, dkk, 2009).

Pendekatan representasi penurunan luas lingkaran berbasis *figural-geometris* dan *analisis-geometris* menjadi salah satu pendekatan paling sederhana, disamping masih banyak pendekatan lain yang lebih kompleks hingga yang menggunakan fasilitas integral dan koordinat. Metode dan pendekatan *figural-geometris* dan *analisis-geometris* sangat tepat bagi siswa sekolah dasar dan menengah pertama, kendati ada bagian-bagian yang patut ditelaah oleh mahasiswa. Metode ini mengedepankan pemahaman *figural-geometris*, yakni pemahaman gambar bangun datar lingkaran yang dibagi atas beberapa *sektor* atau *juring* identik, untuk kemudian juring-juring tersebut disusun membentuk bangun datar geometri lain seperti *persegi panjang, jajargenjang, segitiga,* dan *trapesium*. Dari bangun-bangun datar elementer yang terbentuk, kemudian muncul kemungkinan untuk menurunkan rumus luas lingkaran dengan menggunakan rumus luas bangun datar elementer, yang sudah diketahui siswa lebih awal (sejak kelas empat SD).

Gagasan dalam tulisan ini diajukan melalui pertanyaan dari manakah representasi rumus luas lingkaran ($L= \pi r^2$) ditemukan. Dan tulisan ini mengedepankan salah satu kemampuan representasi dengan menggunakan pendekatan *figural-geometris* dan *analisis-geometris* yang secara fundamental mendorong siswa untuk mendapatkan gagasan kreativitas bahkan menumbuhkan *habits of mind* dan daya nalar yang tinggi. Dengan demikian, diharapkan para guru matematika melalui tulisan ini mendapat pandangan pendekatan baru dalam representasi penurunan rumus luas lingkaran, serta adanya sejumlah pemikiran untuk dikaji lebih lanjut, dan lebih bermakna.

B. Pembahasan

1. Representasi Konsep Dasar Pola Penurunan Rumus Luas Lingkaran dari Bangun Datar Geometri

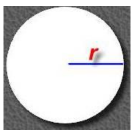
Konsep dasar ini adalah konsep yang digunakan dalam proses pembahasan, yakni penurunan rumus luas lingkaran ($L= \boldsymbol{\pi r^2}$) dari bangun-bangun datar geometri lain (*seterusnya*

E-ISSN : 2541-2906

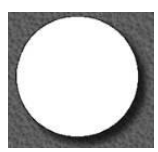
Vol. 10 No.1, 2021

disebut bangun datar elementer). Proses dimaksud adalah proses *figural-geometris* dan *analitis*. Artinya ada proses *figural-geometri* yang dilakukan, yakni menggunakan gambar lingkaran dan bagian lingkaran yang disebut *juring*, disusun hingga membentuk bangun datar geometri elementer lain. Kemudian prosesnya dilengkapi dengan *analisis geometri*, yakni menggunakan manipulasi simbolik dalam menurunkan rumus luas lingkaran, sesuai fakta yang ada pada figural geometrisnya.

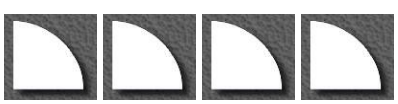
Untuk maksud tersebut, pandang gambar lingkaran berikut dengan jari-jari r, dan dengan rumus luas: $\boldsymbol{L = \pi r^2}$.



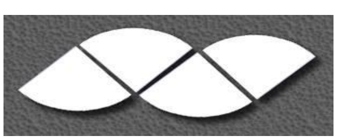
Dari manakah rumus luas lingkaran diperoleh? Salah satu cara menurunkan rumus tersebut adalah dengan metode *figural-geometris* dan *analisitis* (Miliyawati, 2015) disamping masih banyak cara lain yang dapat digunakan, seperti *analisis-integral*. Pada konsep dasar ini, disajikan cara figural-geometris dan analitis untuk menurunkan rumus luas lingkaran dari bangun datar persegi panjang (*kasus khusus*), dan seterusnya digunakan untuk bangun datar elementer lainnya. Cara ini dimulai dengan menampilkan figural lingkaran, serta potongan-potongan yang diperoleh dengan membagi daerah lingkaran secara identik menjadi *sektor* atau *juring*. Lalu kemudian menyusun juring-juring sedemikian rupa sehingga membentuk bangun persegi panjang, lalu menghitung luas persegi panjang tersebut secara analitis-geometris.

Titik awal dimulai dari sebuah lingkaran, yang akan dipecah-pecah menjadi juring-juring. Perhatikan gambar lingkaran di  samping ini.

Sekarang, lingkaran dibagi menjadi 4 bagian juring yang sama seperti berikut:

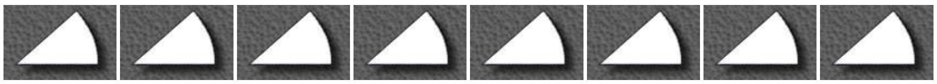


Kemudian keempat juring disusun sedimikan rupa hingga berbentuk seperti:



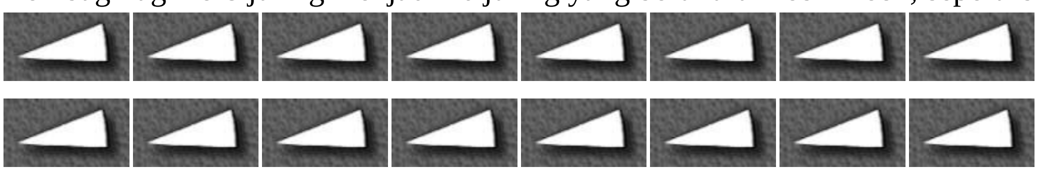
Delta-Pi: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika
E-ISSN : 2541-2906
Vol. 10 No.1, 2021

Kenyataannya belum terlihat seperti persegi panjang. Untuk itu keempat juring dibagi lagi menjadi 8 juring yang identik, seperti berikut:

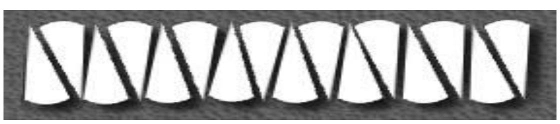


Ke-8 juring disusun lagi dengan cara serupa, sampai ditemukan bentuk yang semakin mendekati persegi panjang, yaitu:

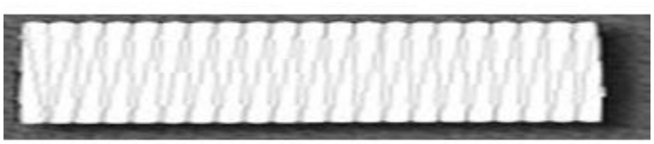
Tetapi, belum juga terlihat sebagai bentuk persegi panjang. Maka langkah berikutnya adalah membagi lagi ke-8 juring menjadi 16 juring yang berukuran lebih kecil, seperti berikut:



Kemudian disusun hingga semakin mendekati bentuk persegipanjang berikut:



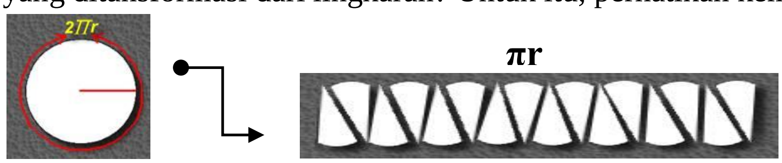
Adapun tujuan proses yang dilakukan adalah agar seluruh juring dapat disusun sedekat mungkin membentuk bangun persegi panjang, sehingga rumus luas persegipanjang: **L = p x l** (*Luas = panjang x lebar*) dapat dipakai untuk menghitung luas lingkaran (***L = πr²***). Akan tetapi pada bentuk terakhir yang dihasilkan, sisi atas dan bawahnya belum berupa garis lurus, sehingga rumus luas persegipanjang kurang presisi untuk digunakan. Karenanya, proses membagi setiap juring dilakukan lagi, hingga ukuran juring semakin kecil, dan ketika disusun membentuk gambar seperti berikut:



Bentuk terakhir ini, sangat dekat menyerupai persegipanjang. Tetapi sisi atas dan bawah juga masih belum benar-benar lurus. Lalu dapat dipahami, jika juring-juring dibagi dan dibagi lagi hingga ukurannya semakin mendekati segitiga samakaki pipih, maka lengkungan busur pada sisi atas dan bawah akan semakin mengecil, mulus dan semakin datar, hingga terlihat sebagai garis lurus, seperti gambar berikut:

Proses *berakhir*, dan ditemukan persegipanjang *sempurna*. Sampai disini, lingkaran telah ditranspormasi secara *figural-geometris* hingga menjadi bangun persegi panjang melalui beberapa kali proses. Sehingga secara akal sehat, luas lingkaran tersebut adalah sama dengan luas persegi panjang.

Pertanyaan berikutnya adalah, berapa ukuran panjang dan lebar dari persegi panjang yang ditansformasi dari lingkaran? Untuk itu, perhatikan kembali gambar sebelumnya:



Diketahui, keliling lingkaran $K=2\pi r$ (*lihat gambar kiri*), dengan r jari-jari lingkaran dan $\pi = \frac{22}{7}$. Dari gambar terlihat bahwa separoh busur dari keliling lingkaran ($\frac{1}{2}K = \pi r$) tersebar pada sisi bawah persegipanjang, dan separoh lagi ($\frac{1}{2}K = \pi r$) tersebar pada sisi atasnya (*lihat gambar kanan*). Jadi jumlah sisi atas dan sisi bawah persegipanjang adalah tetap, yakni $2\pi r$. Perhatikan juga bahwa sisi kiri dan kanan persegi panjang adalah sebesar jari-jari lingkaran, yakni r. Dengan demikian luas lingkaran, dapat dinyatakan dalam luas persegi panjang (*sesuai hukum kekekalan luas*), yakni dapat dicari dengan rumus: $L = p \ x \ l$ (*Luas=panjang x lebar*). Pada gambar kanan terlihat panjang $\boldsymbol{p = \pi r}$ dan lebar $\boldsymbol{l = r}$, maka persegi panjang: $= p \ x \ l = \pi r \ x \ r = \pi r^2$. Terbukti sama dengan luas lingkaran. Sampai disini, secara khusus luas lingkaran telah berhasil diturunkan dari luas persegi panjang. Berikutnya akan dikerjakan untuk keseluruhan, dan untuk itu diperlukan berbagai teknik dan kesepakatan awal, seperti dijelaskan berikut.

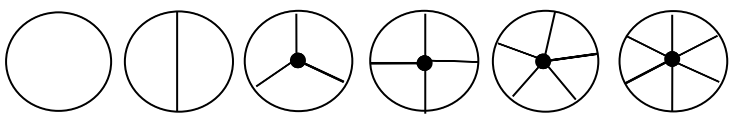
2. Representasi Teknik Mendapatkan Juring Lingkaran

Karena pembahasan melibatkan proses penyusunan juring lingkaran untuk membentuk bangun datar *persegi panjang, jajargenjang, segitiga,* dan *trapesium*, maka pada bagian ini disajikan dahulu proses mendapatkan juring dari lingkaran, yakni dengan dua cara, yaitu:

E-ISSN : 2541-2906

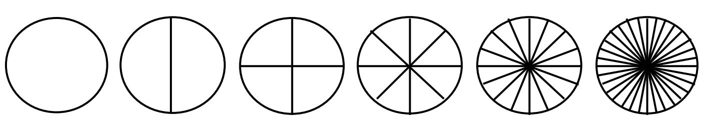
Vol. 10 No.1, 2021

(i) Membagi *sudut pusat* lingkaran atas bagian yang sama, sehingga menghasilkan juring identik sebanyak angka pembagi (*selanjutnya disebut pembagian menurut sudut pusat*). Misalnya, jika sudut pusat dibagi dua ($\frac{360^o}{2}=180^o$) maka didapat dua buah juring identik (berupa separuh lingkaran). Jika sudut pusat dibagi atas tiga bagian ($\frac{360^o}{3}=120^o$), maka didapat tiga buah juring identik. Jika sudut pusat dibagi atas 4 bagian ($\frac{360^o}{4}=90^o$), maka didapat empat juring identik. Demikian seterusnya membagi sudut pusat atas sebarang bilangan n tertentu ($\frac{360^o}{n}$), akan dihasilkan juring identik sebanyak n. Dengan cara ini, akan selalu dihasilkan juring berjumlah: 2,3,4,5,6,7,.., (genap dan ganjil). Perhatikan gambar berikut:


….. dst

2 juring *3 juring* *4 juring* *5 juring* *6 juring*

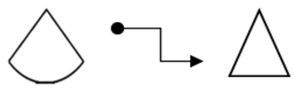
(ii) Membagi lingkaran menurut garis tengah/diameter lingkaran (*selanjutnya disebut pembagian menurut garis tengah/diameter*) dan menghasilkan juring-juring identik berjumlah genap. Cara kedua ini selalu menghasilkan juring berjumlah genap, karena pembagian dilakukan tepat pada diameter lingkaran, membagi dua setiap bagian juring sebelah-menyebelah. Pembagian pertama dilakukan menurut garis tengah pertama dan menghasilkan dua juring identik. Pembagian kedua dilakukan dengan membagi lagi kedua juring yang diperoleh, sebelah-menyebelah menurut garis tengah kedua, sehingga dihasilkan empat juring identik. Pembagian ketiga dilakukan terhadap keempat juring yang ada, dengan memotong pada dua garis tengah sekaligus, sehingga dihasilkan delapan juring identik. Demikian seterusnya pembagian dilakukan secara serempak membagi setiap juring sebelah-menyebelah dan menghasilkan juring identik berjumlah genap: 2,4,8,16,32,… Perhatikan gambar berikut:


….dst

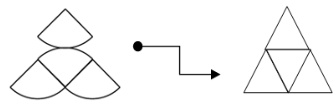
2 juring *4 juring* *8 juring* *16 juring* *32 juring*

3. Kesepakatan Figural

Untuk memperlancar proses teknis, maka dalam kebanyakan kesempatan dalam tulisan ini, akan digunakan segitiga sama kaki sebagai ganti dari juring, seperti gambar *(i)* di bawah ini.



(i)



(ii)

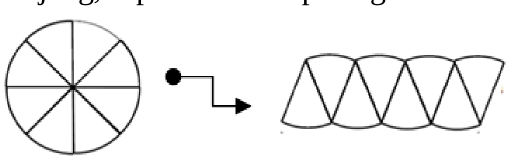
Sehingga susunan 4 buah *juring* misalnya, dapat disajikan dengan figural *segitiga sama kaki*, seperti pada gambar *(ii)* di atas.

Kesepakatan ini didasarkan pada gagasan berikut. Ketika lingkaran dibagi atas empat juring misalnya, bangun geometri yang disusun dari keempat juring tersebut bentuknya belum sempurna. Masih terlihat berbeda dengan bangun geometri elementer yang diinginkan (*misalnya segitiga*). Tetapi, ketika ukuran juring-juring diperkecil (*setiap juring dibagi dua*), maka juring-juring dapat disusun sedekat mungkin menyerupai bangun datar geometri dimaksud. Dengan kata lain, jika sudut pusat lingkaran dibagi atas n bagian yang sama, dan n menuju tak hingga ($n \to \infty$), maka juring yang dihasilkan akan semakin menuju segitiga sama kaki.

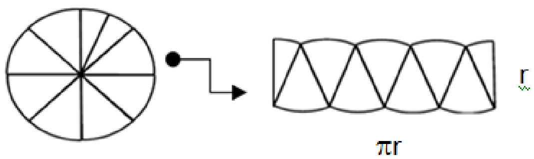
Dengan juring-juring demikian (*segitiga sama kaki*), akan dapat disusun lebih mudah sehingga lebih sempurna membentuk banguan datar geometri elementer. Seterusnya dalam tulisan ini, *juring* dan *segitiga sama kaki* sering dapat dipertukarkan, tanpa bermaksud mengubah arti. Juga, *juring* dan *segitiga sama kaki* sering digambar lebih besar tampilannya, hanya untuk memperjelas figural.

4. Representasi Penurunan Rumus Luas Lingkaran dari Persegi panjang

Penurunan rumus luas lingkaran ($\boldsymbol{L=\pi r^2}$) dari persegi panjang telah dipaparkan pada konsep dasar sebelumnya (*lihat bagian B-1*), yakni dengan dua tahap. Jika sedikit mengulang proses pada *bagian B-1* di atas, maka daerah lingkaran dipotong-potong dahulu menjadi juring iedentik berjumlah: 2,3,4,5,6,7,8,…,selanjutnya disusun berjejer ke samping dengan menempelkan sisi jari-jari dari masing-masing juring hingga mendekati bentuk persegi panjang, seperti terlihat pada gambar di bawah ini (misalnya lingkaran atas 8 juring).



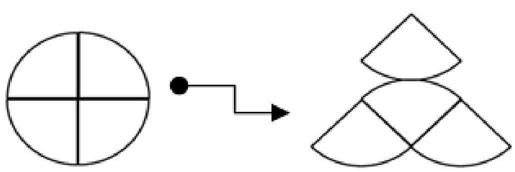
Tetapi bangun yang terbentuk ini, masih lebih dekat kepada bentuk jajargenjang dibanding persegi panjang. Untuk mengatasi hal tersebut, harus dilakukan lagi proses membagi setiap juring (*menurut diameter*) sampai ukurannya semakin kecil, dan ketika disusun, hasilnya semakin mendekati bentuk persegi panjang. Tetapi cara ini, membutuhkan sejumlah kali proses pemotongan sampai ditemukan bentuk persegi panjang yang lebih sempurna. Tapi, teknis praktis sederhana dapat ditempuh, yakni membagi 1 (*satu*) saja juring dari 8 yang ada, lalu kedua potongannya diletakkan separoh menutupi sisi kiri dan separoh lainnya menutupi sisi kanan, sehingga sisi kiri dan sisi kanan terlihat lurus. Lebih mendekati bentuk persegipanjang, seperti gambar berikut:



Sekarang daerah lingkaran telah tersusun sedemikian rupa sehingga bentuk barunya berupa persegi panjang. Jadi menurut hukum kekekalan luas, kedua figural tersebut memiliki luas yang sama (Ruseffendi, 2012: 39). Jadi, luas lingkaran sekarang dapat dihitung menggunakan luas persegi panjang yaitu: *L=p x l* (*L=luas, p=panjang* dan *l=lebar*). Dari gambar terlihat $p = \pi r$ dan $l = r$, maka luas lingkaran adalah: $L = p \times l = \pi r \times r = \pi r^2$ (*terbukti*)

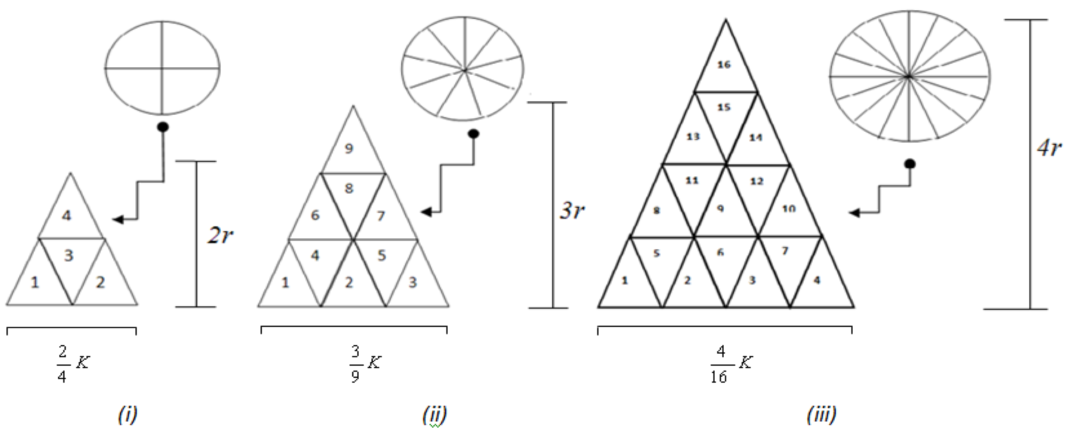
5. Representasi Penurunan Rumus Luas Lingkaran dari Segitiga

Untuk menurunkan rumus luas lingkaran dari segitiga, pertama-tama lingkaran dibagi dahulu menjadi juring-juring identik berjumlah: 4, 9, 16, 25, 36,.. atau sebanyak n^2 (untuk n = 2,3,…). Berturut-turut deretan bilangan ini menunjukkan banyaknya juring yang dibutuhkan dalam membentuk segitiga. Dengan unsur yang lebih banyak, dibentuk segitiga yang lebih besar ukurannya. Kemudian juring-juring tersebut disusun sedemikian rupa sehingga membentuk segitiga, seperti gambar berikut:



Tetapi bentuk ini belum persis segitiga. Maka untuk mempermudah pemahaman figural, unsur juring (*dengan busur lengkungnya*) diganti dengan bangun *segitiga sama kaki*, sehingga penyusunannya secara teknis lebih mudah dilakukan. Berikut ini, disajikan lingkaran dengan tiga jenis jumlah juring, masing-masing berjumlah: 4, 9 dan 16, disusun sehingga terlihat seperti gambar berikut:

Ketiga segitiga pada gambar di atas, didapat dari lingkaran yang sama, tetapi dibagi menurut unsur juring yang berbeda jumlahnya. Lingkaran pada gambar *(i)* dibagi atas 4 juring, gambar *(ii)* dibagi atas 9 juring dan gambar *(iii)* dibagi atas 16 juring.



Dari ketiga gambar, diketahui bahwa lingkaran yang sama telah ditansformasi (*secara figural-geometris*) menjadi bangun segitiga dalam tiga jenis jumlah juring. Dan selalu dapat dipahami bahwa luas lingkaran itu sama dengan luas bangun turunannya, yakni segitiga (*hukum kekekalan luas*).

Pertanyaan berikutnya adalah mengenai luas. Berapakah panjang alas dan tinggi masing-masing segitiga yang terbentuk? sehingga luasnya dapat dihitung dan dapat diklaim sebagai luas lingkaran? Berdasarkan data pada gambar di atas, luas lingkaran dihitung seperti pada tabel berikut: (K= keliling lingkaran, dan r jari-jari).

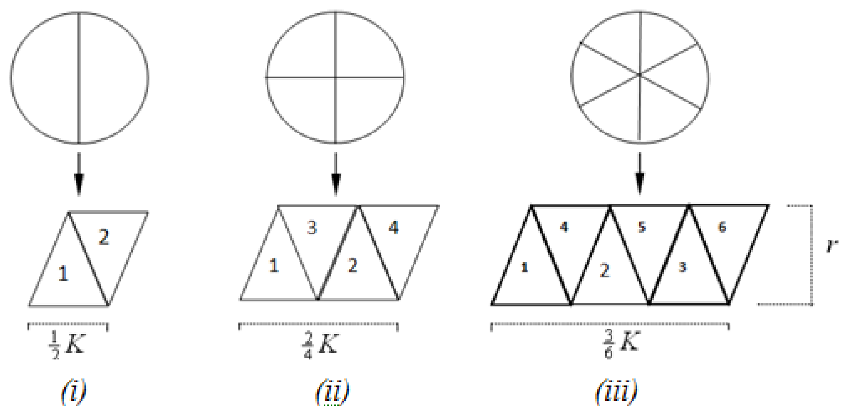
Segitiga (i)
L = $\frac{1}{2}\ x\ Alas\ x\ Tinggi$
L = $\frac{1}{2} x\ (\frac{2}{4} K)\ x\ 2r$
L = $\frac{1}{2}\ x\ (\frac{2}{4}(2.\pi.r))\ x\ 2r$
L = $\frac{4}{8}\pi r\ ,\ \ x\ 2r$
L = πr^2
Terbukti

Segitiga (ii)
L = $\frac{1}{2}\ x\ Alas\ x\ Tinggi$
L = $\frac{1}{2} x\ (\frac{3}{9} K)\ x\ 3r$
L = $\frac{1}{2}\ x \frac{3}{9}(2.\pi.r)\ \ x\ 3r$
L = $\frac{6}{18}\ \pi.r\ \ \ x\ 3r$
L = πr^2
Terbukti

Segitiga (iii)
L = $\frac{1}{2}\ x\ Alas\ x\ Tinggi$
L = $\frac{1}{2} x\ (\frac{4}{16} K)\ x\ 4r$
L = $\frac{1}{2} x \left(\frac{4}{16}.2.\pi.r\right)\ x\ 4r$
L = $\frac{1}{2} x\ (\frac{1}{2}.\pi r)\ \ x\ 4r$
L = πr^2
Terbukti

6. Representasi Penurunan Rumus Luas Lingkaran dari Jajargenjang

Untuk menurunkan rumus luas lingkaran dari jajar genjang, pertama-tama lingkaran dibagi dahulu menjadi juring-juring identik berjumlah: 2,4, 6,8,10,… atau berjumlah 2n, (untuk n = 1,2,3,..). Berturut-turut deretan bilangan ini menunjukkan banyak juring yang dibutuhkan membentuk jajargenjang. Dengan unsur yang lebih banyak, membentuk jajar genjang yang lebih besar ukurannya. Kemudian juring-juring tersebut disusun sedemikian rupa sehingga membentuk jajar genjang. Berikut ini adalah contoh lingkaran yang dibagi atas juring-juring berjumlah: 2,4, dan 6, yang disusun menjadi jajar genjang:



Luas ketiga jajar genjang tersebut adalah sama yakni πr^2, identik dengan luas lingkaran dari mana jajargenjang itu dibentuk. Analisis penurunannya disajikan seperti berikut: (*K* adalah *keliling lingkaran*, dan r *jari-jari*)

Jajargenjang (i)
L = $Alas\ x\ Tinggi$
L = $(\frac{1}{2}K)\ x\ r$
L = $\frac{1}{2}(2.\pi.r)\ x\ r$
L = $\frac{2}{2}\pi r\ \ x\ r$
L = πr^2
Terbukti

Jajargenjang (ii)
L = $Alas\ x\ Tinggi$
L = $(\frac{2}{4}K)\ x\ r$
L = $\frac{2}{4}(2.\pi.r)\ x\ r$
L = $\frac{4}{4}\pi.r\ \ x\ r$
L = πr^2
Terbukti

Jajargenjang (iii)
L = $Alas\ x\ Tinggi$
L = $(\frac{3}{6}K)\ x\ r$
L = $\left(\frac{3}{6}(2.\pi.r)\right)\ x\ r$
L = $\frac{6}{6}\pi.r\ \ x\ r$
L = πr^2
Terbukti

7. Representasi Penurunan Rumus Luas Lingkaran dari Trapesium

Untuk menurunkan rumus luas lingkaran dari bangun datar trapesium, pertama-tama lingkaran dibagi dahulu menjadi juring-juring identik, menurut aturan jumlah sebagai berikut:

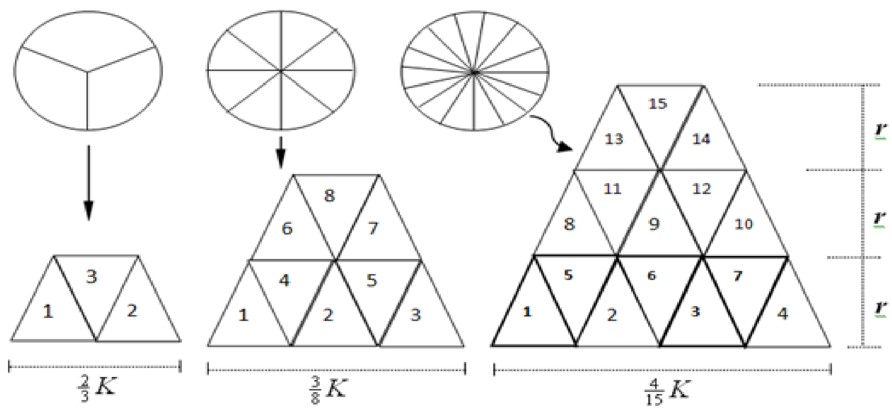
3,5,7,9,11,… atau sebanyak (2n+1), untuk n = 1,2,3,.. $\Rightarrow$ Trapesium tingkat 1

8,12,16,20,… atau sebanyak 2(2n+2) untuk n =1,2,3,… $\Rightarrow$ Trapesium tingkat 2

15,21,27,33,… atau sebanyak 3(2n+3) untuk n =1,2,3,… $\Rightarrow$ Trapesium tingkat 3.

n^2+2n, n^2+4n,.. atau sebanyak n(2n+n) untuk n =1,2,3,… $\Rightarrow$ Trapesium tingkat n.

Kenyataannya, trapesium dibentuk dengan juring lingkaran dalam jumlah yang berbeda-beda seperti deretan angka tersebut di atas. Untuk trapesium *tingkat satu* misalnya, dibutuhkan juring dengan jumlah ganjil: 3,5,7,... Artinya, setiap unsur juring berjumlah 3, 5, atau berjumlah 7 dan seterusnya selalu membentuk trapesium *tingkat satu*. Untuk trapesium *tingkat dua* dibutuhkan juring dengan jumlah genap: 8,12,16, 20,…. Artinya, setiap unsur juring berjumlah 8,12, atau berjumlah 16 dan seterusnya, selalu membentuk trapesium *tingkat dua*. Demikian seterusnya untuk juring berjumlah n^2+2n, n^2+4n, … ($n=1,2,3,\ldots$), selalu membentuk *trapesium tingkat n*. Berikut ini adalah contoh lingkaran yang dibagi atas juring berjumlah 3, 8 dan 15, masing-masing disusun membentuk *trapesium tingkat satu*, *tingkat dua* dan *tingkat tiga*:



(i) Tingkat- 1 *(ii) Tingkat-2* *(iii) Tingkat-3*

Berikut ini adalah penurunan rumus luas lingkaran dari trapesium. Perhatikan, *K = keliling lingkaran*, *a* dan *b* sisi sejajar trapesium.

Trapesium Tkt-1	*Trapesium Tkt-2*	*Trapesium Tkt-3*
$L = \frac{1}{2}\,x\,(a+b)\,x\,Tinggi$	$L = \frac{1}{2}\,x\,(a+b)\,x\,Tinggi$	$L = \frac{1}{2}\,x\,(a+b)\,x\,Tinggi$
$L = \frac{1}{2}\,x(\frac{2}{3}K+\frac{1}{3}K)\;x\;r$	$L = \frac{1}{2}\,x(\frac{3}{8}K+\frac{1}{8}K)\;x\;2r$	$L = \frac{1}{2}\,x(\frac{4}{15}K+\frac{1}{15}K)\;x\;3r$
$L = \frac{1}{2}\,x\left(\frac{3}{3}K\right)\quad x\;r$	$L = \frac{1}{2}\,x\left(\frac{4}{8}K\right)\quad x\;2r$	$L = \frac{1}{2}\,x\left(\frac{5}{15}K\right)\quad x\;3r$
$L = \frac{1}{2}\,x(2.\pi.r)\quad x\;r$	$L = \frac{1}{2}\,x\,\frac{1}{2}(2.\pi.r)\quad x\;2r$	$L = \frac{1}{2}\,x\,\frac{1}{3}(2.\pi.r)\quad x\;3r$
$L = \pi r^2$	$L = \pi r^2$	$L = \pi r^2$
Terbukti	***Terbukti***	***Terbukti***

8. Bangun Datar Geometri yang Dapat Disusun dari Juring Lingkaran

Berikut ini adalah tabel banyaknya juring sebuah lingkaran yang dihasilkan dari pembagian identik atas sejumlah tertentu garis bagi (diameter), serta menunjukkan apakah juring-juring tersebut dapat ditransformasi (disusun) membentuk bangun datar geometri elementer lainnya,atau tidak.

Banyak Garis Tengah (Garis Pembagi)		N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Banyak Juring Lingkaran		2^N	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096
Bangun datar yang dapat disusun	1. Persegipanjang			-	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	2. Jajargenjang			-	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	3. Segitiga			-	✓	-	✓	-	✓	-	✓	-	✓	-	✓
	4. Trapesium			-	-	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Simbol ceklis (✓) menunjukkan bahwa bangun datar bersangkutan dapat disusun dari jumlah juring yang tertera pada baris dua. Sementara simbol (-) menunjukkan sebaliknya, kecuali untuk juring berjumlah 2 untuk bangun datar persegi panjang dan jajargenjang secara figural kurang memuaskan, walau secara hakekat dapat diterima. Dari tabel tersebut, beberapa kenyataan dapat disimpul seperti berikut:

a. Lingkaran yang dibagi menurut garis tengah (diameter), yang menghasilkan juring-juring jumlah genap, maka juring-juring tersebut dapat disusun membentuk (*mendekati*) bangun datar geometri elementer seperti *persegi panjang*, *jajargenjang*, *segitiga*, *belah ketupat* dan *trapesium.* Sehingga luas lingkaran dapat diturunkan dari bangun datar geometri elementer tersebut.

b. Lingkaran yang dibagi menurut garis tengah (diameter), yang menghasilkan juring-juring jumlah genap, ternyata tidak dapat sekaligus disusun membentuk keempat bangun datar elementer *persegi panjang*, *jajargenjang*, *segitiga*, dan *trapesium*. Jadi terdapat empat jenis bangun datar yang dapat disusun juring lingkaran. Sedangkan jenis bangun datar yang jumlah juringnya genap, tidak dapat disusun juring lingkaran.

c. Bangun *persegi* kemungkinan besar tidak bisa disusun dari juring lingkaran sedemikian. Tulisan ini belum membahas kenyataan ini, kendati untuk kasus persegi panjang dengan dimensi: panjang setengah keliling ($\boldsymbol{p} = \frac{1}{2}K$) dan lebar sebesar jari-jari (l=r), terlihat setengah keliling ($\frac{1}{2}K$) tidak mungkin sama dengan jari-jari r, sebab: $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}K=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{2}.\boldsymbol{\pi}.\boldsymbol{r})=\boldsymbol{\pi}.\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{r}$. Tidak mungkin panjang sama dengan lebar *(dimensi persegi)*. Sementara bangun datar *layang-layang* kemungkinan besar tidak dapat disusun dari juring-juring lingkaran sedemikian karena layang-layang dibangun oleh segitiga-segitiga sama kaki yang tidak simetris.

d. Bangun *pesegi panjang* dapat disusun dari juring-juring lingkaran berjumlah genap. Kenyataannya persegi panjang bukan saja dapat dibentuk dari juring-juring berjumlah

E-ISSN : 2541-2906

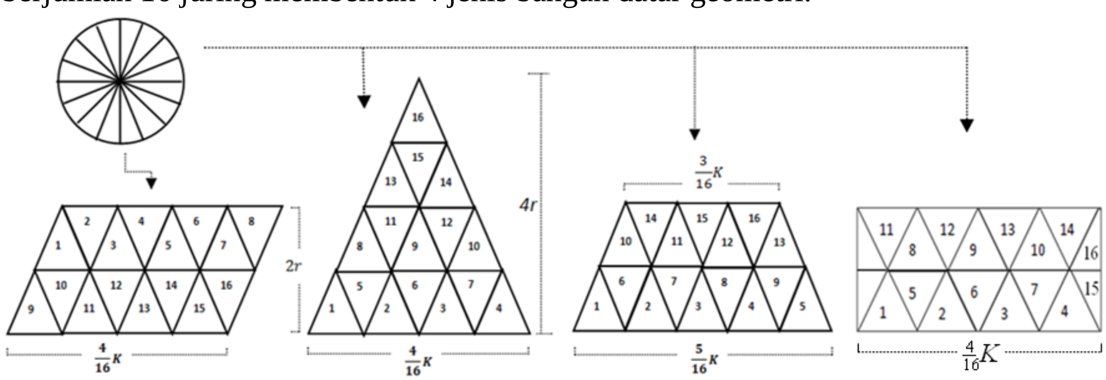
Vol. 10 No.1, 2021

genap (*lihat tabel diatas*), tetapi juga dari juring berjumlah ganjil. Jadi persegi panjang dapat dibentuk dari *sebarang jumlah juring* yang dihasilkan dari pemotongan menurut sudut pusat lingkaran, atau garis tengah/diameter.

e. Bangun *jajargenjang* dapat disusun dari juring-juring berjumlah genap. Berbeda dengan persegi panjang, jajar genjang tidak dapat dibentuk dari juring-juring berjumlah ganjil.

f. Bangun *trapesium* dapat disusun dari juring-juring berjumlah genap. Dan kenyataannya trapesium dapat dibentuk dari juring berjumlah ganjil (*untuk yang berjumlah ganjil tidak sajikan dalam tabel*).

Dari sejumlah hasil tersebut di atas, terlihat bahwa lingkaran yang dapat dibagi atas sejumlah genap juring melalui pembagian menurut garis tengah, maka luas lingkaran tersebut (L= πr^2) dapat diturunkan langsung dari kelima bangun datar geometri yang dapat dibentuk, yaitu: *persegi panjang, jajargenjang, segitiga,* dan *trapesium.* Artinya, rumus luas lingkaran (L= πr^2), dapat diturunkan berturut-turut dari luas bangun datar: *(i)* persegi panjang, yakni *L = panjang x lebar*, *(ii)* jajar genjang, yakni *L= alas x tinggi*. *(iii)* segitiga, yakni $L = \frac{1}{2}$ *x alas x tinggi*, dan *(iv)* trapesium, yakni $L = \frac{1}{2} x\ (a+b) x\ Tinggi$. Dan jika luas setiap bangun datar geometri yang terbentuk dihitung menurut rumus luasnya masing-masing, maka seluruhnya akan menghasilkan πr^2, yakni sama dengan luas lingkaran. Gambar berikut adalah lingkaran berjumlah 16 juring membentuk 4 jenis bangun datar geometri.



a. Jajargenjang b. Segitiga c. Trapesium d. Persi Panjang

Berikut ini adalah penurunan luas lingkaran dari keempat bangun datar geometri yang terbentuk. Berdasar gambar, didapat data-data keempat bangun datar sebagai berikut: (*K*=keliling lingkaran, dan *r* jari-jari)

	Alas/Panjang	Tinggi/Lebar
a. Jajargenjang	$\frac{4}{16}K$	2r
b. Segitiga	$\frac{4}{16}K$	4r
c. Trapesium	$\frac{5}{16}K$, $\frac{3}{16}K$	2r

Delta-Pi: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika
E-ISSN : 2541-2906
Vol. 10 No.1, 2021

d. Persegipanjang	$\frac{4}{16}K$	2r

Persegipanjang	*Jajargenjang*	Segitiga	Trapesium
$L = Panjang\ x\ Lebar$	$L = Alas\ x\ Tinggi$	$L = \frac{1}{2}\ x\ Alas\ x\ Tinggi$	$L = \frac{1}{2}\ x\ (a+b) x\ Tinggi$
$L = \frac{4}{16}K\ x\ 2r$	$L = \frac{4}{16}K\ x\ 2r$	$L = \frac{1}{2}\ x\ \frac{4}{16}K\ x\ 4r$	$L = \frac{1}{2}\ x\left(\frac{5}{16}K + \frac{3}{16}K\right)\ x\ 2r$
$L = \frac{4}{16}(2.\pi.r)\ x\ 2r$	$L = \frac{4}{16}.(2.\pi.r)\ x\ 2r$	$L = \frac{1}{2}\ x\ \frac{4}{16}.(2.\pi.r)\ x\ 4r$	$L = \frac{1}{2}\ x\left(\frac{8}{16}K\right)\ x\ 2r$
$L = \frac{16}{16}(\pi.r)\ x\ r$	$L = \frac{8}{16}\pi r\ x\ 2r$	$L = \frac{8}{32}\pi.r\ x\ 4r$	$L = \frac{1}{2}\ x(\frac{1}{2}.2\pi r)\ x\ 2r$
$L = \pi r^2$	$L = \pi r^2$	$L = \pi r^2$	$L = \pi r^2$
Terbukti	***Terbukti***	***Terbukti***	***Terbukti***

Dari keempat bangun datar geometri tersebut terbukti dapat menurunkan rumus luas lingkaran, yakni L = πr^2 . Simpulnya, bangun datar yang apabila dibagi menurut garis tengah lingkaran dan berjumlah 16 juring dapat menurunkan rumus luas lingkaran.

C. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan mengenai representasi pola penurunan rumus luas lingkaran berbasis *figural-geometris- analisis*, dapat disimpulkan bahwa bagian yang dipaparkan dalam studi literatur ini baru sebagian kecil dari kumpulan literatur yang kaji, dan atau permulaan untuk penelitian selanjutnya. Masih sangat banyak bagian pembahasan yang patut diselidiki lebih lanjut hingga didapat berbagai pendapat atau bahkan teori baru untuk mendukung pembelajaran matematika di sekolah. Kendati demikian beberapa butir kesimpulan yang dapat diperoleh sekaligus dimanfaatkan baik guru maupun siswa untuk memperkaya khasana pengetahuan matematika, kesimpulan dimaksud adalah sebagai berikut:

1. Bangun datar lingkaran dapat dipotong-potong menjadi juring-juring lingkaran dan juring-juring tersebut dapat disusun membentuk bangun datar geometri elementer lain seperti *persegi panjang*, *jajargenjang*, *segitiga*, dan *trapesiun*. Sehingga menurut hukum kekekalan luas, luas sebarang lingkaran sebelum dipotong-potong dan sesudah disusun membentuk bangun geometri yang lain, adalah sama
2. Bangun *persegi panjang* dapat disusun dari juring-juring lingkaran berjumlah: 2,3,4,5,6,7,8,…
3. Bangun *segitiga* dapat dibentuk dari juring-juring lingkaran berjumlah: 4, 9, 16, 25, 36,..atau mengikuti rumus n^2 (untuk n = 2,3,…)

4. Bangun *jajargenjang* dapat dibentuk dari juring-juring lingkaran berjumlah: 2,4, 6,8,10,… atau mengikuti rumus 2n, (untuk n = 1,2,3,..).
5. Bangun *trapesium* dapat dibentuk dari juring-juring lingkaran berjumlah:
   3,5,7,9,11,… atau dengan rumus (2n+1), untuk n = 1,2,3,.. $\Rightarrow$ Trapesium tingkat 1
   8,12,16,20,… atau dengan rumus 2(2n+2) untuk n =1,2,3,… $\Rightarrow$ Trapesium tingkat 2
   15,21,27,33,… atau dengan rumus 3(2n+3) untuk n =1,2,3,… $\Rightarrow$ Trapesium tingkat 3.
   n^2+2n, n^2+4n,.. atau dengan rumus n(2n+n) untuk n =1,2,3,… $\Rightarrow$ Trapesium tingkat n.

D. DAFTAR PUSTAKA

Bell, F.H, (1987). Theaching and Learning Mathematics, USA, Brown Company Publishers

Google: http://www.artofproblemsolving.com/LaTeX/Examples/AreaOfACircle.pdf

Google: http://id.wikipedia.org/wiki/Lingkaran (diakses, 23 Oktober, 2019)

Hollands, Roy. (2005). Kamus Matematika. Jakarta: Penerbit Erlangga

J. Purcell, Edwin. (1999). Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 2. Jakarta: Penerbit Erlangga

Miliyawati, B. (2015). Geometri. Modul Mata Kuliah Geometri. UNSUB

Ruseffendi. (2012). Pendidikan Matematika 3. Jakarta: Universitas Terbuka

Setya Budhi, Wono. (2010). Kalkulus Peubah Banyak. Edisi Revisi. Bandung: Penerbit ITB

Soemartojo, N. (1998). Kalkulus I. Jakarta: Penerbit Erlangga

Subanji, dkk, (2009). Matematika Kreatif. Malang: Penerbit UM