

Keterhubungan pelangi kuat operasi korona graf berlian dan graf lintasan

Alfi Maulani¹¹Program Studi Matematika, Universitas Pamulang

Abstrak : Salah satu kasus pewarnaan sisi dalam teori graf yaitu bilangan keterhubungan pelangi kuat. Banyaknya minimum warna yang dibutuhkan untuk mewarnai sisi-sisi di H agar setiap pasangan simpul dapat dihubungkan oleh lintasan geodesik (lintasan terpendek) yang berbeda warna disebut bilangan keterhubungan pelangi kuat dari graf H , yang dinyatakan sebagai $src(H)$. Selanjutnya, diperlukan operasi korona pada graf dengan menggunakan n salinan P_1, P_2, \dots, P_n dari P_m dan 1 (satu) salinan dari graf Br_n guna menghasilkan graf $Br_n \odot P_m$ yang strukturnya diperoleh setelah menghubungkan setiap simpul dari Br_n ke masing-masing simpul di P_i . Metode studi literatur digunakan dalam penelitian ini. Penelitian ini menghasilkan nilai-nilai eksak atau bilangan keterhubungan pelangi kuat dari operasi korona graf berlian Br_4 dan graf lintasan P_m , dinotasikan dengan $src(Br_4 \odot P_m)$, disertai dengan visualisasi $src(Br_4 \odot P_m)$ menggunakan salah satu aplikasi *Latex* yaitu *Tikz*.

Kata kunci : Keterhubungan Pelangi Kuat ; Br_4 ; P_m ; *Tikz*

A. Pendahuluan

Pewarnaan dan pelabelan graf merupakan salah satu topik yang membuat jenis pewarnaan graf ini menarik dan memungkinkan untuk penelitian yang lebih mendalam dalam teori graf. Pemberian warna yang berlainan untuk setiap daerah yang saling berdekatan menjadi awal munculnya pewarnaan graf, yakni pewarnaan peta. (Chartrand, G., Johns, G.L., McKeon, K.A., Zhang, 2008) pertama kali mengemukakan bilangan keterhubungan pelangi kuat dari suatu graf pada tahun 2008. Bilangan keterhubungan pelangi kuat dapat diterapkan di beberapa saluran pemancar yang dikonfigurasi untuk mencegah interferensi ke tingkat yang dapat diterima pada perlindungan kata sandi transmisi dan pengaturan jadwal ujian sehingga setiap mahasiswa dapat mengikuti ujian mata kuliah apa pun yang mereka ikuti sesuai dengan jadwal ujian.

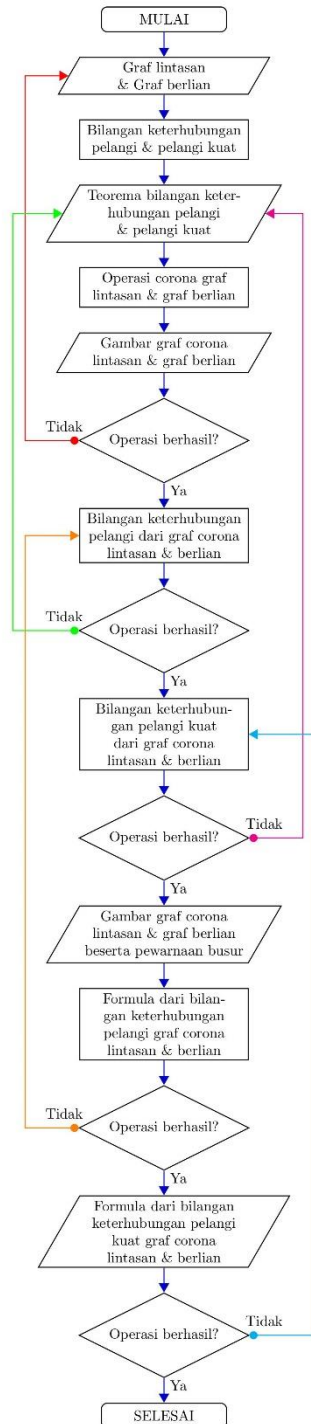
Setiap dua sisi berdekatan bisa berwarna mirip atau sama dikarenakan definisi pewarnaan sisi: $E(H) \rightarrow \{1,2,3, \dots, k\}, k \in N$ dengan asumsi bahwa graf H adalah graf terhubung tak kosong. Jika setiap dua *path* terdekat atau lintasan geodesik memiliki warna yang tidak sama, maka *path* tersebut disebut lintasan pelangi kuat. Dua simpul yang tidak sama dikatakan terhubung pelangi kuat pada Graf H jika dihubungkan oleh lintasan $u - v$ geodesik pelangi di H

yang panjangnya $dG(u, v)$, sehingga menghasilkan pewarnaan c pelangi kuat pada graf H tersebut yang bergantung pada banyaknya c warna yang digunakan, disimbolkan dengan $src(H)$. $Src(H)$ merupakan jumlah minimal warna yang digunakan dalam memberi warna setiap sisi di graf H agar terhubung pelangi kuat.

Bilangan keterhubungan pelangi dan bilangan keterhubungan pelangi kuat dari suatu graf merupakan salah satu topik yang masih menarik untuk dipelajari seperti yang telah diperkenalkan pertama kali pada tahun 2008 oleh Chartrand dkk yakni beberapa kelas graf khusus seperti graf pohon (T_m), graf roda (W_m), graf lintasan (P_m), graf multipartit lengkap ($K_{m,m,m}$), graf lengkap (K_m), dan graf bipartit lengkap ($K_{m,n}$). Begitu juga pada tahun 2013, Li dan Sun berhasil mengemukakan hasil penelitiannya berupa bilangan keterhubungan pelangi dari beberapa graf (Li, Shi, & Sun, 2013). Selanjutnya, tahun 2015 telah diperkenalkan bilangan keterhubungan pelangi dan bilangan keterhubungan pelangi kuat pada graf Berlian oleh Shulhany and Salman dinotasikan dengan $rc(Br_n)$ dan $src(Br_n)$ (Shulhany & Salman, 2015). Penelitian mengenai Graf Berlian juga pernah dikemukakan oleh (Ryt, 2012), (Riezsa Dessyluviani, 2017), (Akadji, Taha, Lakisa, & Yahya, 2019) dan (Sulistiyono, Slamini, Dafik, Agustin, & Alfarisi, 2020). Sebelumnya, penelitian mengenai Graf Lintasan dan Graf Korona juga pernah dikemukakan oleh (Yulia, 2015) dan (Sinta Adelina, 2018). Sedangkan, Maulani pada tahun 2019 mengemukakan *rainbow connection number* dari $C_m \odot P_n$, $W_m \odot P_n$, $F_m \odot P_n$ dan lainnya (Maulani, 2019). Selanjutnya, pada tahun berikutnya yaitu tahun 2020, (Maulani, Pradini, Setyorini, & Sugeng, 2020) mengemukakan hasil penelitiannya tentang *rainbow connection number* dari graf korona $C_m \odot P_n$ dan $C_m \odot C_n$.

B. Metode Penelitian

Tahapan awal dari penelitian graf ini yaitu menganalisis setelah mengkaji berbagai sumber literatur yang memuat mekanisme tahapan pembuktian teorema terkait dengan konsep keterhubungan pelangi kuat pada graf yang telah dikemukakan oleh beberapa peneliti terdahulu. Selanjutnya peneliti mengembangkan teori dengan menentukan bilangan keterhubungan pelangi kuat (*strong rainbow connection number*) pada operasi korona dari graf (Br_4) dan graf lintasan (P_m). Penelitian ini juga memvisualisasikan bentuk umum $src(Br_4 \odot P_m)$ dengan menggunakan salah satu aplikasi *Latex* yaitu *Tikz*. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada Gambar 1 berikut ini.



Gambar 1. Diagram Alir Bilangan Keterhubungan Pelangi Kuat $Br_4 \odot P_m$ dengan $Tikz$.

C. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini dipaparkan pembuktian dari bilangan keterhubungan pelangi kuat graf korona $Br_4 \odot P_m$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$src(Br_n \odot P_m) = src(Br_n) + \left(\left\lceil \frac{u}{3} \right\rceil \cdot (m + 1) \right), \text{ untuk } m \geq 2, n = 4, u \geq 2.$$

Langkah pembuktian dari bilangan keterhubungan pelangi kuat graf korona $Br_4 \odot P_m$ di atas akan dijelaskan disini. Tahap pembuktian pertama, didefinisikan graf Br_4 sebagai graf terhubung yang mempunyai bilangan keterhubungan pelangi kuat berdasarkan hasil penelitian graf berlian yang telah dikemukakan oleh Shulhany & Salman pada tahun 2015. Dengan menggunakan definisi graf korona, terdapat graf berlian Br_4 dan 8 salinan graf P_m , sebut P_i^* ; $i = 0, 1, \dots, 8$ pada struktur graf $Br_4 \odot P_m$. Tahap pembuktian kedua, akan ditunjukkan bahwa pada masing-masing $v_i P_i^*$ atau $u_i P_i^*$ di $Br_4 \odot P_m$ memuat n warna tidak sama dengan mengasumsikan ada $v_i P_i^*$ atau $u_i P_i^*$ memuat warna yang tidak berbeda. Diketahui $deg(v_i) = n$ atau $deg(u_i) = n$ sehingga dapat ditentukan 2 simpul sebarang, misal simpul $(v_{ij}$ dan $v_{kr})$ atau simpul $(u_{ij}$ dan $u_{kr})$ dengan $i < n$ yang menghasilkan *path* yaitu $v_{ij} - v_i - \dots - v_k - v_{kr}$ atau $u_{ij} - u_i - \dots - u_k - u_{kr}$. Apabila dipilih *path* $v_{ij} - v_i - \dots - v_k - v_{kr}$ atau $u_{ij} - u_i - \dots - u_k - u_{kr}$ maka diperoleh *path* $(v_{ij}-v_{kr}) := v_{ij} - v_i - \dots - v_k - v_{k(r-1)} - v_{kr}$ atau $(u_{ij}-u_{kr}) := u_{ij} - u_i - \dots - u_k - u_{k(r-1)} - u_{kr}$ sementara *path* geodesik atau *path* terpendeknya yaitu $(v_{ij}-v_{kr}) := v_{ij} - v_i - \dots - v_k - v_{kr}$ atau $(u_{ij}-u_{kr}) := u_{ij} - u_i - \dots - u_k - u_{kr}$. Tampak jelas bahwa *path* geodesik atau *path* terpendek pelangi $v_{ij}-v_{kr}$ maupun $u_{ij}-u_{kr}$ tidak ada yang mengakibatkan kontradiksi. Hal ini menunjukkan bahwa masing-masing $v_i P_i^*$ atau $u_i P_i^*$ di $Br_4 \odot P_m$ memuat n warna yang berlainan.

Pada tahap pembuktian ketiga, akan ditunjukkan bahwa $src(Br_n \odot P_m) \geq src(Br_n) + \left(\left\lceil \frac{u}{3} \right\rceil \cdot (m + 1) \right)$ untuk $m \geq 2, n = 4, u \geq 2$. Seperti pada tahap pembuktian pertama, didefinisikan graf Br_4 sebagai graf terhubung yang mempunyai bilangan keterhubungan pelangi kuat berdasarkan hasil penelitian graf berlian yang telah dikemukakan oleh Shulhany & Salman pada tahun 2015. Dengan menggunakan definisi graf korona, terdapat graf berlian Br_4 dan 8 salinan graf P_m , sebut P_i^* ; $i = 0, 1, \dots, 8$ pada struktur graf $Br_4 \odot P_m$. Selanjutnya, dimisalkan simpul-simpul di P_i^* sebagai $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in}$; $i = 0, \dots, 4$ atau $u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in}$; $i = 1, \dots, 3$.

Masing-masing simpul $v_{ij}, j = 1, \dots, m$ atau $u_{ij}, j = 1, \dots, m$ di $V(P_1^*)$ yang dimisalkan tersebut saling berdekatan dengan simpul v_1 atau u_1 di $V(P_m)$. Terbentuknya *path* v_{1j}, v_{1n} atau u_{1j}, u_{1n} di P_1^* dikarenakan adanya simpul v_{in} atau u_{in} di $V(P_1^*)$ sehingga P_1^* merupakan graf terhubung yang mengakibatkan $v_{1n} \in V(P_1^*)$ atau $u_{1n} \in V(P_1^*)$ saling berdekatan dengan $v_1 \in V(P_m)$ atau $u_1 \in V(P_m)$. Menurut hasil penelitian yang telah dikemukakan oleh Shulhany & Salman pada tahun 2015 mengenai graf berlian, Br_4 memuat bilangan keterhubungan pelangi kuat sehingga ada lintasan pelangi kuat di Br_4 untuk masing-masing 2 simpul sebarang di Br_4 . Tanpa mengurangi perumuman, andaikan $v_i, v_m \in V(Br_4)$ atau $u_i, u_m \in V(Br_4)$ dengan v_i atau u_i saling berdekatan terhadap simpul-simpul di P_i^* dan v_m atau u_m saling berdekatan terhadap simpul-simpul di P_m^* . Untuk lebih jelasnya, dapat dilihat pada Gambar 2. Selanjutnya, dihasilkan $v_i v_{in} = \left\lfloor \frac{u}{3} \right\rfloor \cdot (m + 1)$ atau $u_i u_{in} = \left\lfloor \frac{u}{3} \right\rfloor \cdot (m + 1)$ dikarenakan masing-masing P_i^* ; $i = 1, \dots, 8$ terhubung ke $v_i \in V(Br_4)$ atau $u_i \in V(Br_4)$ memuat warna yang berlainan, sehingga menurut hasil penelitian Shulhany & Salman pada tahun 2015 mengenai keterhubungan pelangi kuat graf berlian, diperoleh $src(Br_4) = 3$. Visualisasi dengan *Tikz* pada Gambar 2 memperlihatkan sisi penghubung $v_i \in V(Br_4)$ dengan $v_{ij}, j = 1, \dots, n$ atau $u_i \in V(Br_4)$ dimana $u_{ij}, j = 1, \dots, n$ memuat $\left\lfloor \frac{u}{3} \right\rfloor \cdot (m + 1)$ warna. Menurut *path* $v_{1j} - v_{mn}$ atau $u_{1j} - u_{mn}$ dengan $v_{1j}, u_{1j} \in V(P_1^*)$ dan $v_{mn}, u_{mn} \in V(P_m^*)$, andaikan warna $v_m v_{mn}$ atau $u_m u_{mn}$ adalah $\left\lfloor \frac{u}{3} \right\rfloor \cdot (m + 1)$ maka lintasan $v_{1j} - v_{mn} := v_{1j}, v_1, \dots, v_i, \dots, v_m, v_{mn}$ atau $u_{1j} - u_{mn} := u_{1j}, u_1, \dots, u_i, \dots, u_m, u_{mn}$ menghasilkan lintasan pelangi kuat dengan panjang *path* $v_{1j} - v_{mn}$ atau $u_{1j} - u_{mn}$ dinyatakan dengan $src(Br_4) + \left(\left\lfloor \frac{u}{3} \right\rfloor \cdot (m + 1)\right) = 3 + \left(\left\lfloor \frac{u}{3} \right\rfloor \cdot (m + 1)\right)$. Adanya *path* yang terhubung pelangi kuat untuk semua *path* pada graf $Br_4 \odot P_m$, dapat diperoleh $src(Br_4 \odot P_m) \geq 3 + \left(\left\lfloor \frac{u}{3} \right\rfloor \cdot (m + 1)\right)$.

Pada tahap pembuktian keempat, akan ditunjukkan bahwa $src(Br_n \odot P_m) \leq 3 + \left(\left\lfloor \frac{u}{3} \right\rfloor \cdot (m + 1)\right)$ untuk $m \geq 2, n = 4, u \geq 2$. Menurut hasil penelitian yang telah dikemukakan oleh Shulhany & Salman pada tahun 2015 mengenai bilangan keterhubungan pelangi kuat pada graf berlian, diperoleh

$$src(Br_n) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } n = 4, \text{ atau } n = 5; \\ \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 2, & \text{untuk } n \geq 6. \end{cases}$$

Selanjutnya, menurut hasil penelitian yang dikemukakan oleh Syafrizal, Medika dan Yulianti pada tahun 2013, diperoleh bilangan keterhubungan pelangi kuat pada graf kipas

$$src(F_n) = \begin{cases} 1; & n = 2; \\ 2; & 3 \leq n \leq 6; \\ \lfloor \frac{n}{3} \rfloor; & n \geq 7. \end{cases}$$

Kembali ke tahap pembuktian keempat, akan ditunjukkan bahwa $src(Br_n \odot P_m) \leq 3 + (\lfloor \frac{u}{3} \rfloor \cdot (m + 1))$, untuk $m \geq 2, n = 4, u \geq 2$ yang terbagi menjadi 4 kasus kemungkinan dalam pembuktian ini.

Visualisasi dengan Tikz pada Gambar 2 memperlihatkan bahwa struktur graf korona $Br_4 \odot P_m$ terbentuk dari graf berlian yang masing-masing pusatnya $\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, u_1, u_2, u_3\}$ saling terhubung dengan graf kipas yang lain lalu menghasilkan beberapa path keterhubungan pelangi kuat. Misalkan $v_a, v_b \in V(Br_4 \odot P_m)$ atau $u_a, u_b \in V(Br_4 \odot P_m)$, ditunjukkan 4 kasus kemungkinan untuk mengetahui $src(Br_4 \odot P_m)$ sebagai berikut:

- Kasus pertama. Ambil $v_a \in V(Br_4), v_b \in V(Br_4)$ atau $u_a \in V(Br_4), u_b \in V(Br_4)$.

Menurut hasil penelitian mengenai bilangan keterhubungan pelangi kuat pada graf berlian diperoleh

$$src(Br_n) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } n = 4, \text{ atau } n = 5; \\ \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 2, & \text{untuk } n \geq 6. \end{cases}$$

- Kasus kedua. Ambil $v_a \in V(Br_4), v_b \in V(P_i^*); i = 0, 1, \dots, 8$ atau $u_a \in V(Br_4), u_b \in V(P_i^*); i = 0, 1, \dots, 8$.

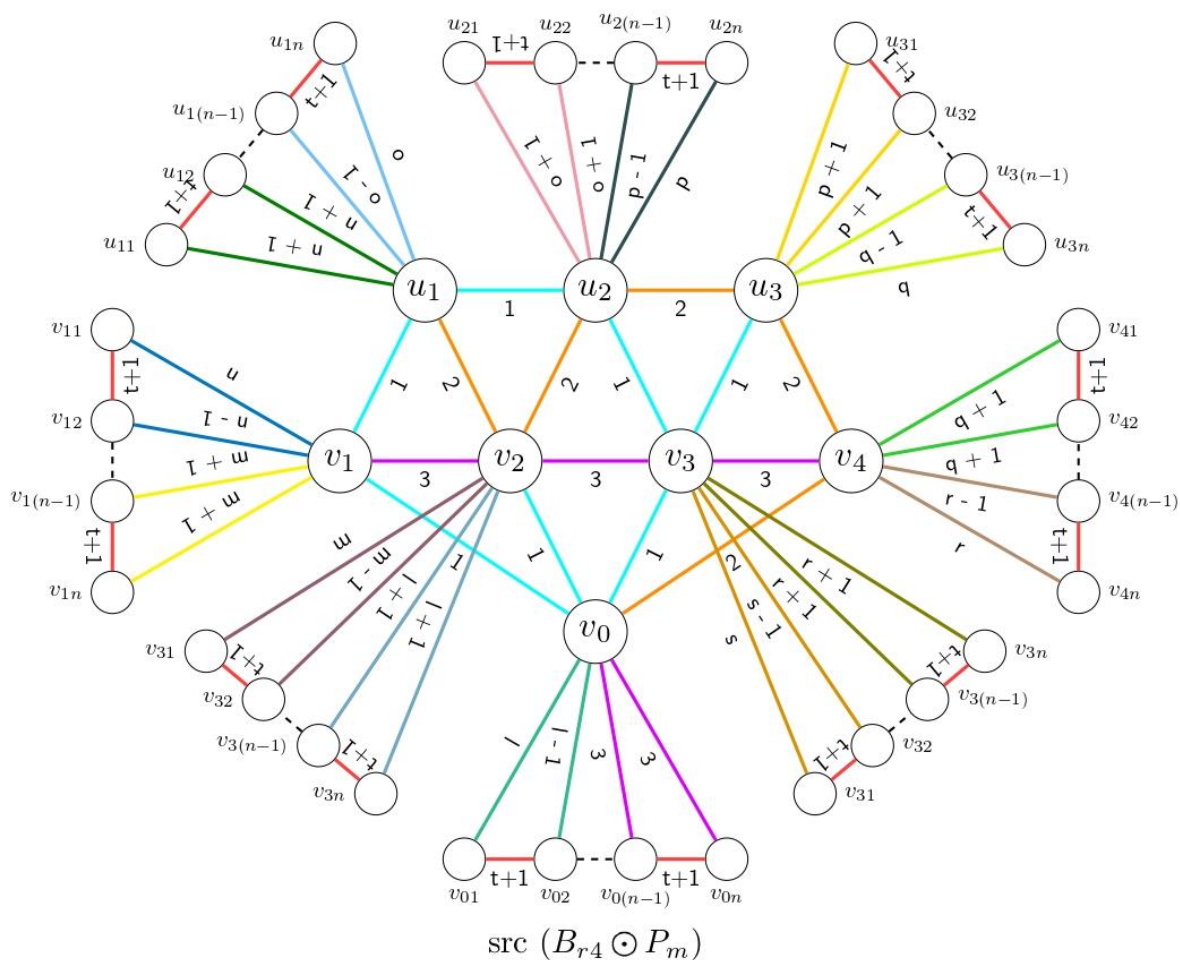
Menurut hasil penelitian mengenai bilangan keterhubungan pelangi kuat pada graf kipas, karena v_a atau u_a merupakan simpul pusat v_p atau u_p , diperoleh

$$src(F_n) = \begin{cases} 1; & n = 2; \\ 2; & 3 \leq n \leq 6; \\ \lfloor \frac{n}{3} \rfloor; & n \geq 7. \end{cases}$$

- Kasus ketiga. Ambil $v_a \in V(Br_4), v_b \in V(P_i^*); i = 0, 1, \dots, 8$ atau $u_a \in V(Br_4), u_b \in V(P_i^*); i = 0, 1, \dots, 8$.

Simpul v_a atau u_a bukanlah simpul pusat v_p atau u_p yang menghasilkan $path v_b - v_p - \dots - v_a$ atau $u_b - u_p - \dots - u_a$, dengan $v_a \in V(Br_4)$ atau $u_a \in V(Br_4)$, sehingga rentang nilai $path v_b - v_a$ adalah $\lfloor \frac{u}{3} \rfloor + 1$ atau rentang nilai $path u_b - u_a$ adalah $\lfloor \frac{u}{3} \rfloor + 1$.

- Kasus keempat. Ambil $v_a \in V(P_i^*), v_b \in V(P_j^*), i, j = 0, 1, \dots, 8$ atau $u_a \in V(P_i^*), u_b \in V(P_j^*), i, j = 0, 1, \dots, 8$.



Gambar 2: Visualisasi Bilangan Keterhubungan Pelangi Kuat pada $Br_4 \odot P_m$ dengan Tikz.

Visualisasi dengan Tikz pada Gambar 2 memperlihatkan dua graf kipas berlainan yang saling berdekatan dan berpusat di v_1 dan v_2 , karena terdapat sebuah sisi yang berdekatan dengan v_1 dan v_2 dapat menghasilkan $path$ geodesik atau $path$ terpendeknya 3. Banyaknya warna dalam sisi-sisi yang digunakan $path$ pelangi diharuskan sesuai dengan $path$ geodesik atau $path$

terpendeknya dikarenakan adanya *strong rainbow connection number* dari suatu graf. Oleh karena itu, masing-masing graf kipas harus memuat warna yang berlainan. Menurut lemma mengenai banyaknya kemungkinan pemberian warna pada graf kipas yang telah dikemukakan oleh Maulani dkk pada tahun 2020, dengan cara pewarnaan yang sama yaitu 1 warna hanya dapat digunakan sebanyak tiga kali.

Visualisasi dengan *Tikz* pada Gambar 2 memperlihatkan penambahan satu warna pada sisi-sisi di $P_1^* \neq P_i^* \neq P_m^*$ yang saling bertetangga dengan sisi-sisi pada graf kipas F_n menghasilkan nilai-nilai eksak $src(Br_4 \odot P_m) \leq 3 + \left(\left\lceil \frac{u}{3} \right\rceil \cdot (m + 1)\right)$. Dapat dibuktikan bahwa $src(Br_4 \odot P_m) \leq 3 + \left(\left\lceil \frac{u}{3} \right\rceil \cdot (m + 1)\right)$ sebagai rentang nilai lintasan $v_a v_b$ atau $u_a u_b$. Berdasarkan hasil dari 4 tahapan pembuktian di atas, dapat ditarik kesimpulan bahwa bilangan keterhubungan pelangi kuat dari graf korona $src(Br_4 \odot P_m) = 3 + \left(\left\lceil \frac{u}{3} \right\rceil \cdot (m + 1)\right)$, untuk bilangan bulat m, n dengan $m \geq 2, n \geq 2, u \geq 2$.

D. Simpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan operasi korona dari graf berlian Br_4 dengan graf lintasan P_m tersebut menghasilkan nilai-nilai eksak dari keterhubungan pelangi kuat graf korona $Br_4 \odot P_m$ yang disimbolkan dengan $src(Br_4 \odot P_m)$. Lebih lanjut, visualisasi dari bentuk umum $src(Br_4 \odot P_m)$ yang terlihat pada Gambar 2 tersebut dilakukan dengan proses komputasi atau *computer code* menggunakan salah satu aplikasi *Latex* yaitu *Tikz*. Bentuk umum $src(Br_4 \odot P_m)$ dapat ditampilkan berikut ini:

$$src(Br_n \odot P_m) = src(Br_n) + \left(\left\lceil \frac{u}{3} \right\rceil \cdot (m + 1)\right); m \geq 2, n = 4, u \geq 2.$$

Daftar Pustaka

- Akadji, A. F., Taha, D., Lakisa, N., & Yahya, N. I. (2019). Bilangan Terhubung Titik Pelangi Pada Amalgamasi Graf Berlian. *Euler : Jurnal Ilmiah Matematika, Sains Dan Teknologi*, 7(2), 56–61. <https://doi.org/10.34312/euler.v7i2.10345>
- Chartrand, G., Johns, G.L., McKeon, K.A., Zhang, P. (2008). No Title. *Rainbow Connection in Graph*, 133(1), 85–98. Retrieved from https://www.emis.de/journals/MB/133.1/mb133_1_8.pdf

- Li, X., Shi, Y., & Sun, Y. (2013). Rainbow Connections of Graphs: A Survey. *Graphs and Combinatorics*, 29(1), 1–38. <https://doi.org/10.1007/s00373-012-1243-2>
- Maulani, A. (2019). Bilangan Keterhubungan Pelangi Dan Keterhubungan Pelangi Kuat Pada Beberapa Kelas Graf Korona. *Statmat : Jurnal Statistika Dan Matematika*, 1(1), 117–130. <https://doi.org/10.32493/sm.v1i1.2378>
- Maulani, A., Pradini, S., Setyorini, D., & Sugeng, K. A. (2020). Rainbow connection number of $C_m \circ P_n$ and $C_m \circ C_n$. *Indonesian Journal of Combinatorics*, 3(2), 95. <https://doi.org/10.19184/ijc.2019.3.2.3>
- Riezsa Dessyluviani, S. (2017). Penentuan Rainbow Connection Number Dan Strong Rainbow Connection Number Pada Graf Berlian. *Jurnal Matematika UNAND*, 6(3), 93. <https://doi.org/10.25077/jmu.6.3.93-99.2017>
- Ryt, P. (2012). *Midsummer Combinatorial Workshop 2012*.
- Shulhany, M. A., & Salman, A. N. M. (2015). Bilangan Terhubung Pelangi Graf Berlian. *Prosiding Seminar Nasional Matematika Dan Pendidikan Matematika UMS*, 916–923.
- Sinta Adelina. (2018). *Pewarnaan Lokal Titik Total Antimagic Pada Graf Roda, Graf Gunung Api Dan Graf Hasil Operasi Korona*. Retrieved from <http://repository.unej.ac.id/handle/123456789/86480>
- Sulistiyono, B., Slamini, Dafik, Agustin, I. H., & Alfarisi, R. (2020). On rainbow antimagic coloring of some graphs. *Journal of Physics: Conference Series*, 1465(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1465/1/012029>
- Yulia, A. H. (2015). *Kajian pewarnaan titik pada operasi graf lintasan, graf lingkaran dan graf bintang*.