Delta-Pi: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika ISSN 2089-855X
Vol. 01, No. 01, April 2012

SIFAT-SIFAT PEMETAAN BILINEAR

Mustafa A.H. Ruhama
Program Studi Pendidikan Matematika
Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
FKIP Universitas Khairun

ABSTRACT

Let U, V and W are vector spaces at the same field, $\varphi : U \times V \rightarrow W$ bilinear mapping, if $W = \mathbb{C}$ that φ is bilinear functional. The collection of all bilinear mapping $\varphi : U \times V \rightarrow W$ denoted with $\mathfrak{B}(U, V; W)$. Problems we will discuss about some properties at bilinear mapping. Furthermore will see $\mathfrak{B}(U, V, W)$ is vector space toward operation $(\varphi + \psi)(x, y) = \varphi(x, y) + \psi(x, y)$ and $(\lambda\varphi)(x, y) = \lambda\varphi(x, y)$ for all scalar λ, $x \in U$, $y \in V$ and $\varphi, \psi \in \mathfrak{B}(U, V; W)$.

Key Word: Vector Space, Bilinear Mapping

PENDAHULUAN

Konsep himpunan dan pemetaan (fungsi) merupakan konsep yang dikenal hampir di semua cabang matematika, walaupun terminologi dan notasi yang digunakan berbeda-beda. Diketahui U dan V masing-masing himpunan yang tak kosong, jika φ adalah suatu pemetaan dari himpunan U ke himpunan V, maka pemetaan tersebut dinotasikan dengan $\varphi : U \rightarrow V$ atau $U \xrightarrow{\varphi} V$.

Jika A dan B masing-masing dua himpunan yang tak kosong ($A \neq \emptyset$ dan $B \neq \emptyset$), maka himpunan yang didefinisikan dengan $A \times B = \{(x, y) : x \in A \ \& \ y \in B\}$ disebut himpunan hasil ganda Cartesius (*Cartesian product*) himpunan A dengan B.

Himpunan yang terdiri atas elemen-elemen yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu disebut ruang. Di dalam analisis modern, beberapa ruang yang sering dibicarakan adalah ruang vektor, ruang metrik, ruang bernorma, ruang Banach, ruang pre-Hilbert dan ruang Hilbert. Diberikan $\varphi : U \times V \rightarrow W$ pemetaan bilinear, jika $W = \mathbb{C}$ maka φ disebut fungsional bilinear. Koleksi semua pemetaan bilinear $\varphi : U \times V \rightarrow W$ dinotasikan dengan $\mathfrak{B}(U, V; W)$. Berdasarkan pemikiran tersebut, permasalahan yang akan diteliti adalah sifat-sifat yang berlaku pada pemetaan bilinear.

METODE

Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur, yaitu mengumpulkan materi-materi penelitian yang dimbil dari beberapa buku analisis yang memuat tentang ruang vektor dan pemetaan bilinear. Selanjutnya mempelajari dan membahas materi tersebut.

PEMBAHASAN

3.1. Landasan Teori

3.1.1 Operasi Biner

Secara intuitif suatu operasi biner atas suatu himpunan S adalah suatu aturan yang menggabungkan dua unsur dari S menjadi satu unsur dari S. Sebelum mendefinisikan operasi biner dalam konteks yang lebih umum, perlu diberikan definisi tentang relasi suatu himpunan sebagai berikut:

Definisi 3.1.1.1. Diketahui A dan B masing-masing dua himpunan yang tak kosong. Suatu **relasi** R dari A ke B adalah himpunan bagian dari $A \times B = \{(x, y) : x \in A \,\&\, y \in B\}$. Dengan perkataan lain suatu relasi R dari A ke B adalah suatu aturan yang menghubungkan unsur dari A ke B.

Andaikan R adalah relasi dari A ke B, dan misalkan R menghubungkan $x \in A$ ke $y \in B$. Hubungan ini dinotasikan dengan xRy atau $(x, y) \in R$.

Definisi 3.1.1.2. Suatu operasi biner $*$ atas suatu himpunan S adalah suatu relasi yang menghubungkan setiap pasangan berurutan (x, y) dari unsur-unsur di S ke tepat satu $z \in S$, dan dinotasikan dengan $x * y = z$.

3.1.2 Pemetaan

Definisi 3.1.2.1. Diketahui A dan B himpunan tak kosong. Suatu pemetaan φ dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu aturan yang menghubungkan setiap unsur dari himpunan A ke tepat satu unsur dari himpunan B.

Jika φ adalah suatu pemetaan dari himpunan A ke himpunan B, maka pemetaan tersebut dinotasikan dengan $\varphi : A \rightarrow B$ atau $A \xrightarrow{\varphi} B$. Himpunan A disebut **domain** (daerah asal) dari φ dan dinotasikan dengan $D(\varphi)$ serta himpunan B disebut **kodomain**(daerah kawan) dan dinotasikan dengan $C(\varphi)$. Jika φ menghubungkan $a \in A$ ke $b \in B$, maka b dikatakan sebagai bayangan dari a oleh pemetaan φ dan dinotasikan dengan $\varphi(a)= b$. Himpunan R $(\varphi)= \{\varphi(\mathrm{a}) : \mathrm{a} \in D(\varphi)\}$ disebut **range** atau daerah hasil.

3.1.3 Ruang Vektor

Sebelum membahas ruang vektor (ruang linear) terlebih dahulu diberikan tentang pengertian grup komutatif dan lapangan (*filed*).

Definisi 3.1.3.1. V himpunan tak kosong dengan operasi biner $*$ merupakan grup komutatif (*abelian*) jika memenuhi:

(i). Untuk setiap $v_1, v_2 \in V$ berlaku $v_1 * v_2 = v_2 * v_1$.

(ii). Untuk setiap $v_1, v_2, v_3 \in V$ berlaku $v_1 * (v_2 * v_3) = (v_1 * v_2) * v_3$.

(iii). Terdapat unsur e sehingga untuk setiap $v \in V$ berlaku $v * e = e * v = v$. e disebut unsur identitas terhadap operasi $*$.

(iv). Untuk setiap $v \in V$ terdapat $v^{-1} \in V$ sehingga berlaku $v * v^{-1} = v^{-1} * v = e$. v^{-1}disebut invers terhadap operasi $*$.

Suatu grup V dengan operasi biner $*$ dinotasikan dengan $(V,*)$.

Definisi 3.1.3.2. F himpunan tak kosong dengan dua operasi biner, yang dinotasikan dengan $\oplus$ dan $\cdot$ merupakan lapangan jika memenuhi:

(i). $(F, \oplus)$ grup komutatif.

(ii). $(F, \ \cdot)$ grup komutatif.

(iii). Untuk setiap $a, b, c \in F$ berlaku

$$a \cdot (b \oplus c) = a \cdot b \oplus a \cdot c \text{ dan } (a \oplus b) \cdot c = a \cdot c \oplus b \cdot c.$$

Contoh 3.1.3.3

1. $\mathbb{R}$ merupakan himpunan bilangan real (nyata) dengan operasi penjumlahan biasa merupakan grup komutatif, sebab

(i). Untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ berlaku $x + y = y + x$.

(ii). Untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}$ berlaku $x + (y + z) = (x + y) + z$.

(iii). Terdapat unsur $0 \in \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ berlaku $x + 0 = 0 + x = x$. 0 disebut unsur identitas terhadap operasi penjumlahan.

(iv). Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ terdapat $-x \in \mathbb{R}$ sehingga berlaku

$x + (-x) = (-x) + x = 0$. $-x$ disebut invers terhadap operasi penjumlahan.

2. $\mathbb{R}$ dengan operasi penjumlahan (+) dan perkalian ($\cdot$) biasa merupakan lapangan , sebab

(i). $(\mathbb{R}, +)$ grup komutatif.

(ii). $(\mathbb{R}, \ \cdot)$ grup komutatif.

(iii). Untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}$ berlaku

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \text{ dan } (x + y) \cdot z = x \cdot y + y \cdot z.$$

Definisi 3.1.3.4. Diketahui $(V, +)$ grup komutatif dan $(F, \oplus, \cdot)$ lapangan. V disebut **ruang vektor** (*vector space*) atau **ruang linear** (*linear space*) atas F jika terdapat operasi $*$ antara keduanya sehingga untuk setiap $x \in V$ dan $\alpha \in F$ menentukan dengan tunggal $\alpha * x$ yang memenuhi sifat-sifat:

(i). $\alpha * (x + y) = \alpha * x + \alpha * y$,

(ii). $(\alpha \oplus \beta) * x = \alpha * x + \beta * x$,

(iii). $(\alpha \cdot \beta) * x = \alpha * (x * \beta)$,

(iv). $1 * x = x$,

untuk setiap $x, y \in V$ dan $\alpha, \beta \in F$.

Untuk penyederhanaan penulisan $\alpha * x$ cukup ditulis αx, $\alpha \oplus \beta$ cukup ditulis $\alpha + \beta$, dan $\alpha \cdot \beta$ cukup ditulis dengan $\alpha\beta$, asalkan tak ada salah pengertian. Anggota ruang vektor disebut **vektor** sedangkan anggota F disebut **skalar**.

Contoh 3.1.3.5

1. Diberikan sebarang bilangan asli n atau $n \in \mathbb{N}$ dan dibentuk $\mathbb{R}^n = \{\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq n\}$. Operasi penjumlahan dan perkalian skalar didefinisikan sebagai berikut:
$$\tilde{x} + \tilde{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$
$$\alpha\tilde{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$
untuk setiap $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\tilde{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$. $\mathbb{R}^n$ merupakan ruang vektor real.
2. $V = C[a, b]$, yaitu koleksi semua fungsi kontinu dari $[a, b]$ ke $\mathbb{R}$. Operasi penjumlahan (+) pada $C[a, b]$ didefinisikan sebagai berikut: Untuk setiap $f, g \in C[a, b]$, fungsi $f + g$ didefinisikan sebagai
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),\ x \in [a, b]$$
maka V merupakan grup komutatif, dengan $(-f)(x) = -f(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$.Jika untuk setiap $f \in V = C[a, b]$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ didefinisikan fungsi αf, dengan rumus $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, $x \in [a, b]$ maka dapat dilihat bahwa $\alpha f \in V. V$ merupakan ruang vektor real.

3.2. Sifat-Sifat Pemetaan Bilinear

Sebelum membahas sifat-sifat pemetaan bilinear terlebih dahulu diberikan definisi tentang pemetaan bilinear dan selanjutnya dengan menggunakan definisi dapat dijabarkan teorema-teorema yang yang berlaku pada pemetaan bilinear.

Definisi 3.2.1. Diketahui $U, V,$ dan W ruang vektor. Pemetaan $\varphi : U \times V \rightarrow W$ dikatakan ***bilinear*** jika memenuhi:

(i). $\varphi(u_1 + u_2, v) = \varphi(u_1, v) + \varphi(u_2, v)$, untuk setiap $u_1, u_2 \in U$ dan $v_1, v_2 \in V$.

(ii). $\varphi(\lambda u, v) = \lambda\varphi(u, v)$, untuk setiap $u \in U$, $v \in V$ dan λ sebarang skalar.

(iii). $\varphi(u, v_1 + v_2) = \varphi\ (u, v_1) + \varphi\ (u, v_2)$, untuk setiap $u \in U$ dan $v_1, v_2 \in V$.

(iv). $\varphi(u, \lambda v) = \lambda\varphi(u, v)$, untuk setiap $u \in U$, $v \in V$ dan λ sebarang skalar.

Jika $W = \mathbb{C}$, φ disebut ***fungsional bilinear*** pada $U \times V$.

Jika U, V, dan W masing-masing ruang vektor, maka koleksi semua pemetaan bilinear $\varphi : U \times V \rightarrow W$ dinotasikan dengan $\mathfrak{B}(U, V; W)$.

Contoh 3.2.2.

1. $\mathbb{R}$ merupakan ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}$. Didefinisikan pemetaan $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan rumus $\varphi(x, y) = 2xy$. Pemetaan φ merupakan pemetaan bilinear, sebab

   (i). Untuk setiap $x_1, x_2, y \in \mathbb{R}$ berlaku

   $$\varphi(x_1 + x_2, y) = 2(x_1 + x_2)y = 2x_1y + 2x_2y = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y).$$

   (ii). Untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ berlaku $\varphi(\lambda x, y) = 2\lambda xy = \lambda 2xy = \lambda\varphi(x, y)$, untuk $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (iii). Untuk setiap $x, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ berlaku

   $$\varphi(x, y_1 + y_2) = 2x(y_1 + y_2) = 2xy_1 + 2xy_2 = \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2).$$

   (iv). Untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ berlaku $\varphi(x, \lambda y) = 2x\lambda y = \lambda 2xy = \lambda\varphi(x, y)$, untuk $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. $\mathbb{R}$ merupakan ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}$. Didefinisikan pemetaan $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dengan rumus $\varphi(x, y) = (1 + i)xy$. Pemetaan φ merupakan fungsional bilinear, sebab

   (i). Untuk setiap $x_1, x_2, y \in \mathbb{R}$ berlaku

   $$\begin{aligned}\varphi(x_1 + x_2, y) = (1 + i)(x_1 + x_2)y &= (1 + i)(x_1y + x_2y).\\ &= (1 + i)x_1y + (1 + i)x_2y)\\ &= \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y).\end{aligned}$$

   (ii). Untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ berlaku

   $$\varphi(\lambda x, y) = (1 + i)\lambda xy = \lambda(1 + i)xy = \lambda\varphi(x, y) \text{ untuk } \lambda \in \mathbb{R}..$$

   (iii). Untuk setiap $x, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ berlaku

   $$\begin{aligned}\varphi(x, y_1 + y_2) = (1 + i)x(y_1 + y_2) &= (1 + i)(xy_1 + xy_2).\\ &= (1 + i)xy_1 + (1 + i)xy_2)\\ &= \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2).\end{aligned}$$

   (iv). Untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ berlaku

   $$\varphi(x, \lambda y) = (1 + i)x(\lambda y) = \lambda(1 + i)xy = \lambda\varphi(x, y) \text{ untuk } \lambda \in \mathbb{R}.$$

 ISSN 2089-855X

3. Diberikan $\mathbb{R}^n = \{\, \tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, 1 \le i \le n\}$. Didefinisikan pemetaan $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dengan rumus $\varphi(\,\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$, untuk setiap $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\tilde{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Pemetaan φ merupakan pemetaan bilinear, sebab

   (i). Untuk setiap $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\tilde{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n), \tilde{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ berlaku

$$\begin{aligned}\varphi(\,\tilde{x} + \tilde{y}, \tilde{z}) &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k) z_k = (x_1 + y_1) z_1 + \dots + (x_n + y_n) z_n \\ &= x_1 z_1 + y_1 z_1 + \dots + x_n z_n + y_n z_n \\ &= (x_1 z_1 + \dots + x_n z_n) + (y_1 z_1 + \dots + y_n z_n) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} (x_k + z_k) + \sum_{k=1}^{n} (y_k + z_k) \\ &= \varphi(\,\tilde{x}, \tilde{z}) + \varphi(\,\tilde{y}, \tilde{z}).\end{aligned}$$

   (ii). Untuk setiap $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\tilde{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ berlaku

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda\,\tilde{x}, \tilde{y}) &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} \lambda x_k y_k = \lambda x_1 y_1 + \dots + \lambda x_n y_n \\ &= \lambda (x_1 y_1 + \dots + x_n y_n) \\ &= \lambda \textstyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \\ &= \lambda \varphi(\,\tilde{x}, \tilde{y}), \text{ untuk } \lambda \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

   (iii). Untuk setiap $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\tilde{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n), \tilde{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ berlaku

$$\begin{aligned}\varphi(\,\tilde{x}, \tilde{y} + \tilde{z}) &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} x_k (y_k + z_k) = x_1 (y_1 + z_1) + \dots + x_n (y_n + z_n) \\ &= (x_1 y_1 + \dots + x_n y_n) + (x_1 z_1 + \dots + x_n z_n) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k) + \sum_{k=1}^{n} (x_k + z_k) \\ &= \varphi(\,\tilde{x}, \tilde{y}) + \varphi(\,\tilde{x}, \tilde{z}).\end{aligned}$$

   (iv). Untuk setiap $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\tilde{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ berlaku

$$\begin{aligned}\varphi(\,\tilde{x}, \lambda\,\tilde{y}) &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} x_k (\lambda y_k) = x_1 (\lambda y_k) + \dots + x_n (\lambda y_n) \\ &= \lambda (x_1 y_1 + \dots + x_n y_n) \\ &= \lambda \textstyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \\ &= \lambda \varphi(\,\tilde{x}, \tilde{y}), \text{ untuk } \lambda \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Teorema 3.2.3. Diberikan U, V, dan W masing-masing ruang vektor atas lapangan yang sama. Jika $\varphi: U \times V \to W$ dan $\psi: U \times V \to W$ dengan $\varphi = \psi$ jika $\varphi(x, y) = \psi(x, y)$ untuk setiap $x \in U$ dan $y \in V$ maka $\mathfrak{B}(U, V; W)$ merupakan ruang vektor terhadap operasi

$$(\varphi + \psi)(x, y) = \varphi(x, y) + \psi(x, y)$$

$$(\lambda \varphi)(x, y) = \lambda \varphi(x, y) \text{ untuk sebarang skalar } \lambda.$$

 ISSN 2089-855X

Bukti:

(i). Untuk setiap $\varphi, \psi \in \mathfrak{B}(U,V;W)$ dan $x \in U$, $y \in V$ berlaku

$$(\varphi+\psi)(x,y) = \varphi(x,y) + \psi(x,y) = \psi(x,y) + \varphi(x,y) = (\psi+\varphi)(x,y).$$

(ii). Untuk setiap $\varphi, \psi, \eta \in \mathfrak{B}(U,V;W)$ dan $x \in U$ dan $y \in V$ berlaku

$$\begin{aligned}(\varphi+(\psi+\eta))(x,y) &= \varphi(x,y) + (\psi+\eta)(x,y)\\ &= \varphi(x,y) + \psi(x,y) + \eta(x,y)\\ &= \big(\varphi(x,y)+\psi(x,y)\big) + \eta(x,y)\\ &= \big((\varphi+\psi)(x,y)\big) + \eta(x,y)\\ &= \big((\varphi+\psi)+\eta\big)(x,y).\end{aligned}$$

(iii). Terdapat $0 \in \mathfrak{B}(U,V;W)$ sehingga untuk setiap $\varphi \in \mathfrak{B}(U,V;W)$ dan $x \in U$ dan $y \in V$ berlaku $(\varphi+0)(x,y) = \varphi(x,y) + 0(x,y) = \varphi(x,y)$.

(iv). Untuk setiap $\varphi \in \mathfrak{B}(U,V;W)$ terdapat $-\varphi \in \mathfrak{B}(U,V;W)$ sehingga berlaku

$$(\varphi+(-\varphi))(x,y) = \varphi(x,y) - \varphi(x,y) = 0(x,y),\ x \in U \text{ dan } y \in V.$$

(v). Untuk setiap $\varphi, \psi \in \mathfrak{B}(U,V;W)$ dan $x \in U$, $y \in V$ berlaku

$\lambda(\varphi+\psi)(x,y) = \lambda(\varphi(x,y)+\psi(x,y)) = \lambda\varphi(x,y) + \lambda\psi(x,y)$, untuk sebarang skalar λ.

(vi). Untuk setiap $\varphi \in \mathfrak{B}(U,V;W)$ dan $x \in U$, $y \in V$ berlaku

$(\lambda+\beta)\varphi(x,y) = (\lambda+\beta)\varphi(x,y) = \lambda\varphi(x,y) + \beta\varphi(x,y)$,

untuk sebarang skalar λ, β.

(vii). Untuk setiap $\varphi \in \mathfrak{B}(U,V;W)$ dan $x \in U$, $y \in V$ berlaku

$(\lambda\beta)\varphi(x,y) = \lambda\beta\varphi(x,y) = \lambda\big(\beta\varphi(x,y)\big)$, untuk sebarang skalar λ, β.

(viii). Untuk setiap $\varphi \in \mathfrak{B}(U,V;W)$ dan $x \in U$, $y \in V$ berlaku $1\varphi(x,y) = \varphi(x,y)$.

Selanjutnya perhatikan contoh 3.2.2 nomor 1, pemetaan $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan rumus $\varphi(x,y) = 2xy$ merupakan pemetaan bilinear. Oleh karena itu akan diperoleh

$$\begin{aligned}\varphi(x+y,x+y) + \varphi(x-y,x-y) &= 2(x+y)(x+y) + 2(x-y)(x-y)\\ &= 2x^2 + 4xy + 2y^2 + 2x^2 - 4xy + 2y^2\\ &= 4x^2 + 4y^2\\ &= 2(2x^2) + 2(2y^2)\\ &= 2\varphi(x,x) + 2\varphi(y,y).\end{aligned}$$

Berdasarkan uraian di atas maka akan diperoleh teorema berikut ini:

Teorema 3.2.4 (Hukum Parallelogram). Diberikan U dan V masing-masing ruang vektor atas lapangan yang sama. Jika $\varphi: U \times U \to V$ bilinear maka

$\varphi(x+y,x+y) + \varphi(x-y,x-y) = 2\varphi(x,x) + 2\varphi(y,y)$ untuk setiap $x, y \in U$.

 ISSN 2089-855X

Bukti:

Karena $\varphi: U \times U \rightarrow V$ bilinear untuk setiap $x, y \in U$ maka

$$\varphi(x+y, x+y) = \varphi(x,x) + \varphi(x,y) + \varphi(y,x) + \varphi(y,y) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

dan

$$\begin{aligned}\varphi(x-y, x-y) &= \varphi\big(x+(-y), x+(-y)\big) \\ &= \varphi(x,x) + \varphi(x,-y) + \varphi(-y,x) + \varphi(-y,-y) \\ &= \varphi(x,x) + \varphi(x,(-1)y) + \varphi\big((-1)y,x\big) + \varphi\big((-1)y,(-1)y\big) \\ &= \varphi(x,x) - \varphi(x,y) - \varphi(y,x) + \varphi(y,y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)\end{aligned}$$

Selanjutnya, persamaan (1) dan (2) dijumlahkan, maka diperoleh

$$\varphi(x+y, x+y) + \varphi(x-y, x-y) = 2\varphi(x,x) + 2\varphi(y,y).$$

Teorema 3.2.5. Diberikan U dan V masing-masing ruang vektor atas lapangan yang sama. Jika $\varphi: U \times U \rightarrow V$ bilinear maka

$$\varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y) + i\varphi(x+iy, x+iy) - i\varphi(x-iy, x-iy) = \theta,$$

untuk setiap $x, y \in U$.

Bukti:

Karena $\varphi: U \times U \rightarrow V$ bilinear untuk setiap $x, y \in U$ maka

$$\varphi(x+y, x+y) = \varphi(x,x) + \varphi(x,y) + \varphi(y,x) + \varphi(y,y) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$-\varphi(x-y, x-y) = -\varphi(x,x) + \varphi(x,y) + \varphi(y,x) - \varphi(y,y) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$i\varphi(x+iy, x+iy) = i\varphi(x,x) - \varphi(x,y) - \varphi(y,x) - i\varphi(y,y) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$-i\varphi(x-iy, x-iy) = -i\varphi(x,x) - \varphi(x,y) - \varphi(y,x) + i\varphi(y,y) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Selanjutnya, persamaan (3), (4), (5) dan (6) dijumlahkan, maka diperoleh

$$\varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y) + i\varphi(x+iy, x+iy) - i\varphi(x-iy, x-iy) = \theta,$$

untuk setiap $x, y \in U$.

Selanjutnya, sebagai ilustrasi terhadap Teorema 3.2.5 perhatikan contoh berikut ini:

Contoh 3.2.6

Diberikan $\mathbb{R}^2 = \{\, \tilde{x} = (x_1, x_2)\}$. Didefinisikan pemetaan $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dengan rumus $\varphi(\,\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_{k=1}^{2} x_k y_k$, untuk setiap $\tilde{x} = (x_1, x_2)$, $\tilde{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Pemetaan φ merupakan pemetaan bilinear. Oleh karena itu diperoleh

$$\varphi(\tilde{x}+\tilde{y}, \tilde{x}+\tilde{y}) = (x_1+y_2)(x_1+y_2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

$$-\varphi(\tilde{x}+\tilde{y}, \tilde{x}+\tilde{y}) = -(x_1+y_2)(x_1+y_2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$\begin{aligned}i\varphi(\tilde{x}+i\tilde{y}, \tilde{x}+i\tilde{y}) &= i(x_1+iy_2)(x_1+iy_2) \\ &= i(x_1^2 + ix_1y_2 + ix_1y_2 + i^2y_2^2)\end{aligned}$$

$$= i(x_1^2 + i2x_1y_2 - y_2^2)$$
$$= ix_1^2 - 2x_1y_2 - iy_2^2 \quad .... \quad (9)$$
$$-i\varphi(\tilde{x} - i\tilde{y}, \tilde{x} - i\tilde{y}) = -i(x_1 - iy_2)(x_1 - iy_2)$$
$$= -i(x_1^2 - ix_1y_2 - ix_1y_2 + i^2y_2^2)$$
$$= -i(x_1^2 - i2x_1y_2 - y_2^2)$$
$$= -ix_1^2 + 2x_1y_2 + iy_2^2 \quad .... \quad (10)$$

Berdasarkan persamaan (7), (8), (9), dan (10) diperoleh

$$\varphi(\tilde{x} + \tilde{y}, \tilde{x} + \tilde{y}) - \varphi(\tilde{x} + \tilde{y}, \tilde{x} + \tilde{y}) + i\varphi(\tilde{x} + i\tilde{y}, \tilde{x} + i\tilde{y}) - i\varphi(\tilde{x} - i\tilde{y}, \tilde{x} - i\tilde{y}) = (x_1 + y_2)(x_1 + y_2) - (x_1 + y_2)(x_1 + y_2) + ix_1^2 - 2x_1y_2 - iy_2^2 - ix_1^2 + 2x_1y_2 + iy_2^2$$
$$= (0,0)$$

SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan, U, Vdan W masing-masing ruang vektor atas lapangan yang sama diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Jika $\varphi: U \times V \rightarrow W$ dan $\psi: U \times V \rightarrow W$ dengan $\varphi = \psi$ jika $\varphi(x, y) = \psi(x, y)$ untuk setiap $x \in U$ dan $y \in V$ maka $\mathfrak{B}(U, V, W)$ merupakan ruang vektor terhadap operasi
$$(\varphi + \psi)(x, y) = \varphi(x, y) + \psi(x, y)$$
$$(\lambda\varphi)(x, y) = \lambda\varphi(x, y) \text{ untuk sebarang skalar } \lambda.$$
2. Jika $\varphi: U \times U \rightarrow V$ bilinear maka
$\varphi(x + y, x + y) + \varphi(x - y, x - y) = 2\varphi(x, x) + 2\varphi(y, y)$, untuk setiap $x, y \in U$.
3. Jika $\varphi: U \times U \rightarrow V$ bilinear maka
$\varphi(x + y, x + y) - \varphi(x - y, x - y) + i\varphi(x + iy, x + iy) - i\varphi(x - iy, x - iy) = \theta$, untuk setiap $x, y \in U$.

DAFTAR PUSTAKA

Berberian, S.K., 1961. *Introduction to Hilbert Space*, Oxford University Press, New York.

Debnath, L and Mikusinski, P., 1999. *Introduction to Hilbert Spaces with Applications*, Academic Press, USA.

Kreyszig, Erwin., 1978. *Introductory Functional Analysis with Application*, John Wiley & Sons, New York.

Saih Suwilo, dkk. 1997. *Aljabar Abstrak, Suatu Pengantar*, USU Press, Medan.

Soeparna Darmawijaya, 2006. *Pengantar Analisis Real*, Jurusan Matematika FMIPA Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

Soeparna Darmawijaya, 2007. *Pengantar Analisis Abstrak*, Jurusan Matematika FMIPA Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.