# RANK DARI MATRIKS ATAS RING

**Ida Kurnia Waliyanti**
Program Studi Pendidikan Matematika
Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
FKIP Universitas Khairun

## ABSTRAK

Matriks yang biasa dipelajari adalah matriks atas lapangan. Matriks ini selalu mempunyai rank. Selanjutnya jika lapangan diganti dengan ring, maka matriks tersebut akan mempunyai ciri khas tersendiri. Untuk itu dalam tulisan ini akan dikaji bagaimana cara mencari rank dari matriks atas ring tersebut.

**Kata kunci**: Matriks, Rank, Ring

## PENDAHULUAN

Matriks merupakan salah satu materi yang dipelajari dalam aljabar. Matriks yang sering dibicarakan merupakan matriks atas lapangan, yaitu matriks-matriks yang entri-entrinya atas lapangan. Namun pada kenyataannya terdapat juga matriks yang entri-entrinya merupakan elemen suatu ring ataupun daerah integral. Untuk matriks dengan entri berupa elemen suatu ring disebut dengan matriks atas ring, dimana ring yang disyaratkan adalah ring komutatif. Demikian juga untuk matriks yang entrinya berupa elemen suatu daerah integral disebut sebagai matriks atas daerah integral.

Rank merupakan salah satu istilah dalam mempelajari matriks. Apa itu rank matriks dan bagaimana cara mencarinya? Ini merupakan tujuan dalam penulisan paper ini. Sebagai motivasi akan dipelajari bagaimana mencari rank matriks atas lapangan.

**Definisi 1**: Misal $A$ matriks ukuran $n$ x $n$ atas lapangan $F$. Yang dimaksud dengan rank ($A$) adalah jumlah atau banyaknya baris atau kolom yang bebas linear.

Untuk mencari rank($A$) dapat digunakan operasi baris elementer atau operasi kolom elementer (OBE/OKE). Untuk lebih jelasnya akan diilustrasikan sebagai berikut:

Diberikan $A \in M_{mxn}(F)$

Dapat dituliskan

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, a_{ij} \in F$$

Kemudian matriks $A$ ini direduksi dengan operasi baris elementer, misal didapatkan hal berikut:

$$\left.\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{r1} & x_{r2} & \dots & x_{rn} \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} r \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n-r \end{matrix}\right. \quad , x_{ij} \in F$$

Karena ada $r$ baris yang semua elemennya tidak sama dengan nol (0) maka dapat dikatakan bahwa baris $A$ yang bebas linear adalah sebanyak $r$. Dengan demikian menurut definisi 1 $rank(A) = r$.

Analog untuk operasi kolom elementer, akan dihasilkan pula $r$ kolom yang semua elemennya tidak sama dengan nol maka dapat dikatakan bahwa kolom $A$ yang bebas linear sebanyak $r$. Artinya menurut definisi 1 $rank(A) = r$.

Hal ini dapat disederhanakan dalam bentuk berikut. Dari matriks $A$ dapat dicari ruang kolom $A$ dan ruang baris $A$. Ruang kolom dan baris ini merupakan sub ruang di $F^n$ yang dibangun oleh kolom-kolom/ baris-baris $A$. Dapat diilustrasikan sebagai berikut:

Ruang Kolom matriks $A$ dapat dituliskan sebagai $RK(A)$, dengan $RK(A) = \{\alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + ... + \alpha_m K_m \mid \alpha_i \in F\}$ dimana $K_i$ merupakan kolom ke-$i$ matriks $A$. Ini adalah sub ruang di $F^n$ yang dibangun oleh kolom-kolom matriks $A$. Jadi $RK(A) = \langle K_1, K_2, ..., K_m \rangle$. Sehingga dapat dilihat $\dim(RK(A)) \geq m$ dan dimensi inilah yang merupakan rank kolom ($A$).

Hal demikian analog untuk ruang baris matriks $A$. Jadi dapat dituliskan pula bahwa Ruang Baris matriks $A$ yang dinyatakan sebagai $RB(A)$, dengan $RB(A) = \{\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + ... + \alpha_n B_n \mid \alpha_i \in F\}$ dimana $B_i$ merupakan baris ke-$i$ dari matriks $A$. Ini adalah sub ruang di $F^n$ yang dibangun oleh baris-baris matriks $A$. Jadi

$RB(A) = \langle B_1, B_2, ..., B_n \rangle$. Sehingga dapat dilihat $\dim(RK(A)) \geq n$ dan dimensi inilah yang merupakan rank baris ($A$).

Dalam materi Aljabar Linear Elementer telah di sebutkan sifat bahwa rank kolom $A$ sama dengan rank baris $A$. Sehingga dapat dibuat suatu definisi rank berikut:

**Definisi 2:** Diberikan matriks $A \in M_{mxn}(F)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, a_{ij} \in F$$

Rank dari matriks $A$ ditulis rank ($A$) merupakan dimensi dari ruang kolom atau ruang baris matriks $A$.

Kemudian apakah ketentuan ini berlaku untuk matriks atas ring? Akan dikaji lebih lanjut dalam pembahasan.

## METODE

Metode yang dipakai dalam tulisan ini adalah kajian pustaka, yaitu melihat referensi kemudian dikaji dengan membandingkan pengertian yang sudah ada sebelumnya.

## PEMBAHASAN

Mencari rank matriks atas lapangan tentunya tidak mengubah arti rank matriks atas lapangan. Mengingat setiap lapangan adalah ring. Sehingga harus diselidiki apakah definisi 1 dan 2 yang berkaitan dengan rank suatu matriks atas lapangan berlaku pada rank matriks atas ring, perhatikan kasus berikut. Diberikan $R$ adalah suatu ring dan $A \in M_{mxn}(R)$. Dalam kasus inipun dapat dicari $RK(A) = \langle K_1, K_2, ..., K_m \rangle$, namun berbeda dengan $A$ sebagai matriks atas lapangan. $RK(A)$ dengan $A$ matriks atas ring merupakan sub modul di $R^m$, demikian juga $RB(A)$. Telah dibahas dalam materi modul bahwa setiap modul belum tentu mempunyai basis. Hal ini juga berlaku disini. Jadi $RK(A)$ dan $RB(A)$ sebagai sub modul di $R^n$ juga belum tentu mempunyai basis. Sehingga tidak dapat ditentukan dengan pasti berapa $\dim(RK(A))$ dan $\dim(RK(A))$. Sementara telah ada ketentuan yang menyebutkan bahwa setiap matriks pasti mempunyai rank, jadi bagaimana mendefinisikan rank matriks atas ring?

Berbicara mengenai ring selain sub ring dipelajari juga tentang ideal, yaitu subring yang mempunyai sifat khusus. Sekarang perhatikan $A \in M_{mxn}(R)$. Misal $r = \min\{m, n\}$ maka dapat dibuat minor-minor dari matriks *A* dengan ukuran *t* , dimana *t* = 1,2,..., *r*. Ternyata setiap minor di *A* akan menentukan ideal di *R*, seperti yang dijelaskan dalam definisi berikut.

**Definisi 3:** Diberikan $A \in M_{mxn}(R)$, untuk setiap *t* = 1,2, ..., *r* = min{*m*,*n*} akan mendefinisikan ideal-ideal dalam R yang dibangun oleh minor-minor *A*.

Untuk mencari $I_t(A)$, harus dihitung determinan masing-masing submatriks/ minor *A* berukuran *t* x *t* dan kemudian ini akan menjadi pembangun bagi ideal di *R* yaitu ideal $I_t(A)$. Menurut teorema Laplace minor ukuran (*t*+1) x (*t*+1) dari *A* termuat dalam ideal $I_t(A)$. Sehingga akan diperoleh rantai ideal dalam *R* sebagai berikut:

$$I_r(A) \subseteq I_{r-1}(A) \subseteq ... \subseteq I_2(A) \subseteq I_1(A) \subseteq R \qquad ..........................................(1)$$

Akan terjadi beberapa kasus dimana *t* bukan berada dalam 1, 2, ..., *r* = min{*m*,*n*}. Maka akan didefinisikan hal berikut:

**Definisi 4:** Diberikan $A \in M_{mxn}(R)$, jika *t* bukan dalam {1, 2, ... ,*r* }, maka didefinisikan $I_t(A)$, sebagai berikut:

$$I_t(A) = \begin{cases} (0), & t > \min\{m, n\} \\ R, & t \le 0 \end{cases}$$

Dari definisi 4 di atas akan diperoleh:

$$(0) = I_{r+1}(A) \subseteq I_r(A) \subseteq I_{r-1}(A) \subseteq ... \subseteq I_2(A) \subseteq I_1(A) \subseteq I_0(A) = R \text{ ................ (2)}$$

Dari sini kita dapat menunjukkan definisi rank suatu matriks atas ring *R*. Perhatian (2). Dengan menghitung Annihilator dari masing-masing ideal akan diperoleh barisan berikut:

$$(0) = Ann_R(R) \subseteq Ann_R(I_1(A)) \subseteq Ann_R(I_2(A)) \subseteq ... \subseteq Ann_R(I_r(A)) \subseteq Ann_R(0) = R$$

........................(3)

Sebagai catatan jika $Ann_R(I_t(A)) \neq 0$, maka $Ann_R(I_k(A)) \neq 0, \forall k \geq t$, sehingga akan terlahir definisi rank sebagai berikut:

 ISSN 2089-855X

**Definisi 5:** Diberikan $A \in M_{mxn}(R)$. Rank matriks *A* yang dinotasikan rk(*A*), merupakan suatu bilangan integer berikut:

$$rk(A) = \max\left\{ t \,\middle|\, Ann_R(I_t(A)) = (0) \right\}$$

Tentunya definisi ini harus tetap berlaku pada saat ring itu adalah lapangan (karena setiap lapangan juga merupakan ring), dan juga tidak boleh bertentangan dengan definisi sebelumnya mengenai rank untuk matriks atas lapangan. Untuk menjelaskan pernyataan ini, perhatikan kasus berikut. Diberikan $A \in M_{mxn}(F)$. Menurut definisi 1 bahwa rank suatu matriks atas lapangan merupakan banyak baris/ kolom yang bebas linear. Pernyataan ini ekivalen dengan mengatakan bahwa $rank_F(A)$ merupakan nilai integer *t* terbesar yang menunjukkan bahwa *A* memuat sub matriks atau minor ukuran *t* x *t* yang determinannya tidak sama dengan nol (0). Karena *F* adalah lapangan, maka $Ann_F(I_t(A)) = (0) \Leftrightarrow I_t(A) \neq (0)$, sehingga rk (*A*) merupakan integer *t* terbesar yang menunjukkan bahwa *A* memuat sub matriks atau minor yang determinannya tidak sama dengan nol. Dengan kata lain $rk(A) = rank_F(A)$. Dengan demikian ketika *R* merupakan lapangan, definisi rank yang diberikan pada definisi 5 sesuai dengan definisi rank secara umum.

Agar lebih memahami materi rank suatu matriks atas ring akan diberikan beberapa contoh sebagai berikut.

**Contoh1:** Diberikan $R = Z/6Z = \left\{ \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5} \right\}$

Hitung rank A, jika diberikan $A = \begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{2} \end{bmatrix} \in M_{2x2}(R)$

Penyelesaian:

Ideal yang ada yaitu $I_1(A) = 2R$ dan $I_2(A) = 4R$. Kemudian akan dihitung Annihilator dari masing-masing ideal:

$$Ann_R(I_1(A)) = \left\{ x \in R \,\middle|\, x.(2R) = \overline{0} \right\} = 3R \neq (0)$$

$$Ann_R(I_2(A)) = \left\{ x \in R \,\middle|\, x.(4R) = \overline{0} \right\} = 3R \neq (0)$$

Sehingga menurut definisi 5 yaitu $rk(A) = \max\left\{ t \,\middle|\, Ann_R(I_t(A)) = (0) \right\}$, karena tidak ada Annihilator dari idealnya yang sama dengan (0), sehingga diperoleh $rk(A) = 0$.□

**Contoh 2:** Diberikan $R = Z/6Z = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$

Hitung rank *B*, jika diberikan $B = \begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{3} \end{bmatrix} \in M_{2x2}(R)$

Penyelesaian:

Ideal yang ada yaitu $I_1(B) = R$ dan $I_2(B) = \{\overline{0}\}$. Kemudian akan dihitung Annihilator dari masing-masing ideal:

$Ann_R(I_1(B)) = Ann_R(R) = (0)$

$Ann_R(I_2(B)) = Ann_R(\{\overline{0}\}) = R \neq (0)$

Sehingga menurut definisi 5 yaitu $rk(B) = \max\{t \mid Ann_R(I_t(B)) = (0)\}$ , karena Annihilator dari idealnya yang sama dengan (0) hanya satu yaitu $Ann_R(I_1(B))$ sehingga diperoleh $rk(B) = 1$. □

**Contoh 3:** Diberikan $R = Z/6Z = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$

Hitung rank *C*, jika diberikan $C = \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{3} & \overline{5} \end{bmatrix} \in M_{2x2}(R)$

Penyelesaian:

Ideal yang ada yaitu $I_1(C) = R$ dan $I_2(C) = 5R$. Kemudian akan dihitung Annihilator dari masing-masing ideal:

$Ann_R(I_1(C)) = Ann_R(R) = (0)$

$Ann_R(I_2(C)) = Ann_R(5R) = (0)$

Sehingga menurut definisi 5 yaitu $rk(C) = \max\{t \mid Ann_R(I_t(C)) = (0)\}$ , karena $Ann_R(I_1(C)) = (0)$ dan $Ann_R(I_2(C)) = (0)$, maka $rk(C) = \max\{1, 2\}$.

Jadi $rk(C) = 2$ □

**Contoh 4:** Diberikan $R = Z/12Z = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$

Hitung rank *D*, jika diberikan $D = \begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{3} & \overline{5} \\ \overline{2} & \overline{0} & \overline{2} \\ \overline{2} & \overline{4} & \overline{6} \end{bmatrix} \in M_{3x3}(R)$

Penyelesaian:

Ideal yang ada yaitu $I_1(D) = R$, $I_2(D) = 2R$, dan $I_3(D) = \{\overline{0}\}$. Kemudian akan dihitung Annihilator dari masing-masing ideal:

$Ann_R(I_1(D)) = Ann_R(R) = (0)$

$Ann_R(I_2(D)) = Ann_R\left(2R\right) = \left\{\overline{0}, \overline{6}\right\} \neq (0)$

$Ann_R(I_3(D)) = Ann_R\left(\overline{0}\right) = R \neq (0)$

Sehingga menurut definisi 5 yaitu $rk(B) = \max\left\{t \,\middle|\, Ann_R(I_t(B)) = (0)\right\}$ , karena Annihilator dari idealnya yang sama dengan (0) hanya satu yaitu $Ann_R(I_1(D))$ sehingga diperoleh $rk(D) = 1$.□

Demikian beberapa contoh yang dapat menjelaskan secara lebih terang mengenai bagaimana cara mencari rank suatu matriks atas ring *R*. Selanjutnya akan dibahas beberapa sifat yang berlaku pada rank suatu matriks atas ring.

**Proposisi 1 :** Diberikan $A \in M_{mxn}(R)$ akan berlaku hal-hal berikut:

a. $0 \leq rk(A) \leq \min\{m, n\}$

b. $rk(A) = rk(A^t)$

c. $rk(A) = 0 \Leftrightarrow Ann_R(I_1(A)) \neq (0)$

Bukti dari proposisi

a. Menurut rantai ideal seperti yang ditunjukkan pada (2) dan dari definisi 4 disebutkan $I_0(A) = R$ sehingga diperoleh $Ann_R(I_0(A)) = Ann_R(R) = (0)$.

   Menurut definisi 5, mengakibatkan $rk(A) \geq 0$ .......(i).

   Dilain pihak jika $t > \min\{m, n\}$ maka menurut rantai ideal seperti yang ditunjukkan dalam (2) dan definisi 4, $I_t(A) = (0)$ sehingga $Ann_R(0) = R$ dari definisi 5 diperoleh $rk(A) \leq \min\{m, n\}$ ..........(ii)

   Dari (i) dan (ii) dapat disimpulkan bahwa $0 \leq rk(A) \leq \min\{m, n\}$

   Jadi pernyataan pertama terbukti□

b. Jelas bahwa setiap ideal di *A* juga merupakan ideal di *A* transpos.

   Jadi $I_\alpha(A) = I_\alpha(A^t), \forall \alpha \in Z$

   Dengan demikian $rk(A) = rk(A^t)$□

c. $rk(A) = 0 \Leftrightarrow Ann_R(I_1(A)) \neq (0)$

i. Diketahui $rk(A)=0$ akan ditunjukkan $Ann_R(I_1(A)) \neq (0)$

$rk(A)=0$ artinya $0=\max\{t \mid Ann_R(I_t(A))=(0)\}$

sehingga untuk $t>0, Ann_R(I_t(A)) \neq (0)$ termasuk saat $t=1$.

Jadi jelas $Ann_R(I_1(A)) \neq (0)$

ii. Diketahui $Ann_R(I_1(A)) \neq (0)$ akan ditunjukkan $rk(A)=0$

Menurut rantai ideal dalam (3), jika diketahui $Ann_R(I_1(A)) \neq (0)$ maka jelas bahwa untuk $t>1$ berlaku $Ann_R(I_t(A)) \neq (0)$. Dengan demikian menurut definisi 4 $I_0(A)=R$ artinya $Ann_R(R)=0$ sehingga diperoleh $rk(A)=0$ □

Dari i. dan ii. jelas bahwa $rk(A)=0 \Leftrightarrow Ann_R(I_1(A)) \neq (0)$□

Demikian sifat yang dimiliki oleh rank suatu matriks. Kemudian akan dibahas mengenai rank suatu matriks atas daerah integral. Daerah integral merupakan struktur antara lapangan dan ring. Untuk itu akan diberikan kasus berikut. *R* merupakan daerah integral. Dari daerah integral *R* ini dapat dibentuk suatu lapangan hasil bagi atas *R* tersebut, katakanlah *F*. Kemudian misalkan $A \in M_{mxn}(R)$, karena *F* merupakan lapangan hasil bagi atas *R*, maka $R \subseteq F$. Sehingga $M_{mxn}(R) \subseteq M_{mxn}(F)$ dan kita dapat lihat bahwa *A* berada dalam $M_{mxn}(R)$. Karena *R* daerah integral, $Ann_R(I_t(A))=(0) \Leftrightarrow I_t(A) \neq (0)$. Sehingga dapat juga dikatakan bahwa $rk(A)=\max\{t \mid A \,\text{dengan minor}\, t \text{ x } t \,\text{tidak sama dengan nol}\}$. Nilai dari *t* ini akan sama baik *A* merupakan matriks di $M_{mxn}(R)$ ataupun *A* matriks di $M_{mxn}(F)$. Sehingga rk(*A*) merupakan rank *A* secara umum seperti terlihat untuk $A \in M_{mxn}(F)$. Dengan demikian dapat dituliskan definisi berikut.

**Definisi 6:** Diberikan *R* daerah integral dengan *F* sebagai lapangan hasil bagi atas *R*. Misal $A \in M_{mxn}(R)$. Maka $rk(A)=rank_F(A)$

Jadi untuk pendifinisian rank matriks atas daerah integral sama dengan rank matriks atas lapangan. Dengan demikian bahasan mengenai rank matriks atas ring, baik sebagai lapangan maupun daerah integral telah dijabarkan secara keseluruhan.

## SIMPULAN

Untuk mencari rank suatu matriks atas ring, harus dicari terlebih dahulu ideal yang ada atau ideal dari matriks tersebut. Ideal ini dibangun dari minor-minor matriks yang dimaksudkan. Selanjutnya harus ditentukan annihilator masing-masing ideal yang ada. Selain itu diperoleh kesimpulan juga bahwa rank suatu matriks sama dengan rank dari matriks tranposenya. Rank matriks tersebut akan sama dengan atau lebih dari nol tetapi tidak lebih dari nilai minimal baris atau kolomnya.

## DAFTAR PUSTAKA

Lang. S,1980, *Linear Algebra: Second Edition*, Columbia University, New York

Brown. W. C., 1992, *Matriks Over Komutatif Ring*, Marcel Dekker, New York