Delta-Pi: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika ISSN 2089-855X
Vol. 01, No. 01, April 2012

INTEGRAL RIEMANN-LEBESGUE

Ikram Hamid
Program Studi Pendidikan Matematika
Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
FKIP Universitas Khairun

ABSTRACT

In this paper, we discuss a Riemann-type integrals, we called *RL*-integral. Then, we will construct the *RL*-integral on $[a, b]$ by studying some basic properties of *RL*-integrable functions, the characteristics of *RL*-primitive, the relation between the *RL*-integral and the Henstock Integral, and some convergence theorems for *RL*-Integral.

Key words: Henstock Integral, RL-Integral, RL-Primitive, Convergence Theorems.

PENDAHULUAN

Dalam definisi integral, integral Riemann menggunakan suatu konstanta positif, sedangkan integral Henstock menggunakan suatu fungsi positif. Namun ke dua jenis integral tersebut dalam masalah numerik, yang lebih dipilih konstanta positif. Hal ini memberikan motivasi untuk memperkenalkan suatu jenis integral yang menggunakan peran konstanta positif, namun tetap mempertahankan sifat dari integral Henstock. Jenis integral yang dimaksud adalah integral Riemann-Lebesgue atau disebut dengan integral-*RL*.

Definisi integral-*RL* telah diperkenalkan oleh (Lee, 1989) dengan beberapa sifat yang kajiannya belum mendalam. Oleh karena itu, dalam paper ini akan diselediki lebih mendalam sifat-sifat integral-*RL*, antara lain sifat-sifat dasar integral-*RL***,** Karakteristik primitif-*RL*, hubungan antara integral-*RL* dengan integral Henstock, dan beberapa teorema kekonvergenan pada integral-*RL*.

METODE

Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur, yaitu mengumpulkan materi-materi penelitian yang dimbil dari beberapa buku analisis yang memuat tentang integral Riemann-Lebesgue. Selanjutnya mempelajari dan membahas materi tersebut.

PEMBAHASAN

1. Partisi dan Integral Henstock

Dalam kajian berikut ini, akan dibicarakan beberapa konsep awal yang diperlukan untuk mengkonstruksi sifat-sifat yang berlaku pada integral-*RL*.

1.1 Partisi

Konsep partisi memberikan kontribusi penting dalam membangun teori integral. Berikut ini akan diperkenalkan pengertian partisi Lebesgue dan partisi Perron $\delta -$ fine.

Definisi 1.1.1 (Pfeffer, 1993) *Diberikan* $[u_1, v_1], [u_2, v_2], \dots, [u_r, v_r]$ *interval-interval yang tidak saling tumpang-tindih di dalam interval* $[a, b] \subset \Re$ *dan* $x_1, x_2, \dots, x_r$ *di dalam* $[a, b] \subset \Re$.

a) *Koleksi pasangan interval-titik*

$\mathcal{P} = \{([u, v], x)\} = \{([u_i, v_i], x_i); i = 1,2, \dots, r\}$ *disebut*

(i) *partisi Lebesgue pada* $[a, b]$ *jika* $\bigcup_{i=1}^{r}[u_i, v_i] = [a, b]$

(ii) *partisi parsial Lebesgue di dalam* $[a, b]$ *jika* $\bigcup_{i=1}^{r}[u_i, v_i] \subset [a, b]$.

b) *Diberikan fungsi* $\delta: [a, b] \longrightarrow \Re$.

Koleksi pasangan interval-titik

$\mathcal{P} = \{([u, v], x)\} = \{([u_i, v_i], x_i); i = 1,2, \dots, r\}$ *disebut*

(i) *Partisi Perron* $\delta - fine$ *pada* $[a, b]$

jika $x_i \in [u_i, v_i] \subset \big(x_i - \delta(x_i), x_i + \delta(x_i)\big)$ *dan* $\bigcup_{i=1}^{r}[u_i, v_i] = [a, b]$

(ii) *partisi parsial Perron* $\delta - fine$ *di dalam* $[a, b]$

jika $x_i \in [u_i, v_i] \subset \big(x_i - \delta(x_i), x_i + \delta(x_i)\big)$ *dan* $\bigcup_{i=1}^{r}[u_i, v_i] \subset [a, b]$.

Partisi yang digunakan pada pembahasan integral Riemann-Lebesgue adalah partisi Lebesgue. Selanjutnya, eksistensi partisi Peron δ-fine pada interval $[a, b] \subset \Re$ yang selanjutnya disebut partisi δ-fine pada interval $[a, b]$, dijamin oleh Teorema 1.1.2.

Teorema 1.1.2 (Lemma Cousin) (Pfeffer, 1993) *Untuk setiap fungsi positif* δ *pada selang* $[a, b]$ *terdapat parisi* δ*-fine pada* $[a, b]$.

Bukti: Dibuktikan dengan kontradiksi. Andaikan terdapat fungsi positif δ pada $[a, b]$ sehingga tidak terdapat partisi δ-fine pada *E*. Diambil selang $E = [a, b]$, $x_j \in E$ dengan $x_j = \frac{a_j + b_j}{2}$, $j = 1,2, \dots, n$. Hal ini mengakibatkan selang *E* terbagi menjadi 2 bagian dengan panjang sama. Karena dalam selang *E* tidak terdapat partisi δ-fine maka paling sedikit salah satu selang bagian tersebut tidak mempunyai partisi δ-fine. Namakan salah satu selang bagian yang dimaksud dengan $E_1 = [a^1, b^1]$. Diambil $x_j \in E$ dengan $x_j = \frac{a_j^1 + b_j^1}{2}$, $j = 1,2, \dots, n$, diperoleh 2 bagian di dalam selang E_1 yang salah satu selang bagiannya tidak mempunya partisi δ-fine. Namakan salah satu

 ISSN 2089-855X

interval bagian yang dimaksud dengan $E_2 = [a^2, b^2]$. Proses ini dilanjutkan terus-menerus sehingga diperoleh barisan selang tertutup $\{E_n\}$ untuk $n = 1,2, \ldots$ yang tidak mempunyai partisi δ-fine dengan sifat

(1) $E \supset E_1 \supset E_2 \supset \cdots$

(2) $\lim_{n\to\infty} |E_n| = 0$, dengan $|E_n|$ menyatakan panjang selang E_n.

Jadi $\{E_n\}$ merupakan barisan selang susut yang memenuhi syarat-syarat teorema selang susut (*nested interval*). Oleh karena itu terdapat tepat satu $x \in E_n$, untuk setiap *n*. Karena $\lim_{n\to\infty} |E_n| = 0$ dan $x \in E_n$ untuk setiap *n*, maka terdapat E_k sehingga $E_k \subset B(x, \delta(x))$. Jelas bahwa (E_k, x) merupakan partisi δ-fine pada selang E_k. Hal ini merupakan suatu kontradiksi. Jadi pengandaian salah.

1.2 Integral Henstock

Selanjutnya, diberikan pengertian integral Henstock dan beberapa sifat Integral Henstock yang akan digunakan pada pembahasan-pembahasan selanjutnya.

Definisi 1.2.1 (Lee, 1999) *Fungsi* $f : [a,b] \longrightarrow \mathfrak{R}$ *dikatakan terintegral Henstock pada* $[a,b]$, *dituliskan* $f \in H[a,b]$, *jika terdapat bilangan real A dengan sifat untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat fungsi positif* δ *pada* $[a,b]$ *sehingga untuk setiap partisi* δ-*fine*$\mathfrak{D} = \{([u,v]; x)\} = \{([u_i, v_i], x_i); i = 1,2,3, \ldots p\}$ *pada* $[a,b]$ *berlaku*

$$\left| (\mathfrak{D}) \sum f(x)(v-u) - A \right| < \varepsilon.$$

Selanjutnya, bilangan *A* di dalam Definisi 2.2.1 disebut nilai integral Henstock fungsi *f* pada $[a,b]$, dan dituliskan

$$A = (H)\int_a^b f = (H)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Diberikan fungsi *f* terintegral Henstock pada $[a,b]$ dan fungsi $F: [a,b] \longrightarrow \mathfrak{R}$, dengan rumus

$$F(x) = (H)\int_a^x f(x)dx,$$

untuk setiap $x \in [a,b]$. Selanjutnya *F* disebut fungsi primitif dari fungsi yang terintegral Henstock pada $[a,b]$ atau *F* disebut primitif-*H* fungsi *f* pada $[a,b]$.

Berdasarkan pembentukan fungsi *F* di atas akan diberikan beberapa sifat integral Henstock pada $[a,b]$ yang berhubungan dengan primitif-*H* fungsi *f* pada $[a,b]$.

Teorema 1.2.2 (Lemma Henstock) (Lee dan Výborný, 1999) *Jika fungsi f terintegral Henstock pada* $[a, b]$, *yaitu untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat fungsi positif* δ *pada* $[a, b]$ *dengan sifat untuk setiap* $\mathfrak{D}$ *partisi* δ*-fine pada* $[a. b]$ *berlaku*

$$\left|(\mathfrak{D})\sum\{f(x)(v-u)-F(u,v)\}\right|<\varepsilon$$

maka untuk sebarang $\mathfrak{D}_1 \subseteq \mathfrak{D}$ *partisi parsial* δ*-fine di dalam* $[a, b]$ *berlaku*

$$\left|(\mathfrak{D}_1)\sum\{f(x)(v-u)-F(u,v)\}\right|<2\varepsilon$$

dengan F menyatakan primitif-H fungsi f pada $[a, b]$.

Diketahui fungsi $f : [a, b] \longrightarrow \mathfrak{R}$. Untuk setiap *N*, dibentuk f^N fungsi pada $[a, b]$ sebagai berikut

$$f^N(x)=\begin{cases} f(x), & |f(x)|\le N \\ N, & f(x)>N \\ -N, & f(x)<-N, \end{cases}$$

untuk setiap $x \in [a, b]$. Selanjutnya, f^N disebut fungsi terpancung (*truncated function*) pada $[a, b]$.

Berdasarkan pendefinisian fungsi terpancung di atas dapat dibangun Lemma 2.2.3.

Lemma 1.2.3 (Lee, 1989) *Jika fungsi f terintegral Henstock mutlak pada* $[a, b]$ *maka* f^N *terintegral Henstock pada* $[a, b]$ *dan primitif dari* f^N *kontinu mutlak pada* $[a, b]$.

Teorema kekonvergenan di dalam integral Henstock memberikan syarat cukup agar limit nilai integral Henstock barisan fungsi terintegral Henstock sama dengan nilai integral fungsi terintegral. Hal tersebut dapat dilihat pada Teorema 2.2.4.

Teorema 1.2.4 (Teorema Kekonvergenan Monoton) (Lee, 1989) *Jika barisan fungsi* $\{f_n\}$, $f_n : [a, b] \longrightarrow \mathfrak{R}$ *untuk* $n = 1,2, \ldots$ *memenuhi*

(i) f_n *konvergen ke* f *hampir di mana-mana pada E untuk* $n \longrightarrow \infty$ *dan* f_n *terintegral Henstock pada* $[a, b]$, *untuk setiap n,*

(ii) $f_1 \le f_2 \le \cdots$ *hampir di mana-mana pada* $[a, b]$,

(iii) $\left\{(H)\int_a^b f_n\right\}$ *konvergen ke A,*

maka f terintegral Henstock pada $[a, b]$ *dan*

$$\lim_{n\to\infty}(H)\int_a^b f_n = (H)\int_a^b f.$$

2. Integral Riemann-Lebesgue

Integral Henstock dalam definisinnya menggunakan fungsi δ, sedangkan integral Riemann-Lebesgue menggunakan konstanta δ. Dalam kajian berikut ini, akan dikonstruksi sifat-sifat integral Rieman-Lebesgue sehingga bisa memiliki hubungan dengan integral Henstock.

Definisi 2.1 (Lee, 1989) *Diketahui* $f : [a,b] \longrightarrow \mathfrak{R}$ *fungsi non-negatif pada* $[a,b]$, a dan $b \in \mathfrak{R}$. *f dikatakan terintegral-RL pada* $[a,b]$ *dituliskan* $f \in RL[a,b]$, *jika terdapat bilangan real A, dengan sifat untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *dan* $\eta > 0$, *terdapat konstanta* $\delta > 0$ *dan himpunan terbuka G, dengan* $|G| < \eta$ *dan untuk setiap partisi* $\mathfrak{D} = \{([u,v];x)\} = \{([u_i,v_i];x_i), i = 1,2,\ldots,p\}$, *dengan* $0 < v - u < \delta$ *dan* $x \in [u,v] \setminus G$ *berlaku*

$$\left|(\mathfrak{D}) \sum_{x \notin G} f(x)(v-u) - A\right| < \varepsilon.$$

Selanjutnya bilangan A di dalam Definisi 3.1.1 disebut nilai integral-*RL* fungsi *f* pada $[a,b]$, dituliskan

$$A = (RL)\int_a^b f = (RL)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Teorema 2.2 *Diberikan* f dan g *fungsi non-negatif pada* $[a,b]$. *Jika fungsi f dan g terintegral-RL pada* $[a,b]$, *maka berlaku*

(i) *cf terintegral-RL pada* $[a,b]$ *untuk setiap skalar* $c \geq 0$, *dengan*

$$(RL)\int_a^b cf = c(RL)\int_a^b f.$$

(ii) $f + g$ *terintegral-RL pada* $[a,b]$, *dengan*

$$(RL)\int_a^b (f+g) = (RL)\int_a^b f + (RL)\int_a^b g.$$

(iii) Jika $f \leq g$ *hampir di mana-mana pada* $[a,b]$, *maka*

$$(RL)\int_a^b f \leq (RL)\int_a^b g.$$

(iv) Jika fungsi $f = 0$ *hampir di mana-mana pada* $[a,b]$ *maka f terintegral-RL pada* $[a,b]$ *dan* $(RL)\int_a^b f = 0$.

(v) Jika fungsi f terintegral-RL pada $[a,b]$ *dan* $f = g$ *hampir di mana-mana pada* $[a,b]$ *maka g terintegral pada* $[a,b]$.

Di dalam Definisi 3.1, bilangan real *A* digunakan untuk menentukan fungsi *f* terintegral-*RL* pada $[a,b]$, dimana bilangan real *A* merupakan nilai integral-*RL* pada

$[a,b]$ yang dapat dihampiri oleh jumlahan berhingga $\sum f(x)(v-u)$ atas partisi Lebesgue pada $[a,b]$. Di sisi lain, dapat ditemukan kriteria untuk menentukan fungsi f terintegral-*RL* pada $[a,b]$, dengan menggunakan selisih dua buah jumlahan $\sum_1$ dan $\sum_2$ atas sebarang dua partisi Lebesgue yang berbeda pada $[a,b]$. Kriteria yang dimaksud adalah kriteria Cauchy seperti dinyatakan pada Teorema 3.3.

Teorema 2.3 (Kriteria Cauchy) *Fungsi* $f : E \longrightarrow \Re$ *non-negatif pada* $[a,b]$ *dan terintegral-RL pada* $[a,b]$ *jika dan hanya jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *dan* $\eta > 0$ *terdapat konstanta* $\delta > 0$ *dan himpunan terbuka G, dengan* $|G| < \eta$ *dan untuk setiap partisi* $\mathfrak{D}_1 = \{([u,v];x)\} = \{([u_i,v_i];x_i), i = 1,2,\dots,p\}$, *dan* $\mathfrak{D}_2 = \{([u,v];x)\} = \{([u_i,v_i];x_i), i = 1,2,\dots,q\}$, *dengan* $0 < v-u < \delta$ *dan* $x \in [u,v] \setminus G$ *berlaku*

$$\left|(\mathfrak{D}_1)\sum_{x\notin G} f(x)(v-u) - (\mathfrak{D}_2)\sum_{x\notin G} f(x)(v-u)\right| < \varepsilon.$$

Berdasarkan Kriteria Cauchy pada Teorema 3.3, dapat diberikan Teorema 3.4.

Teorema 2.4 *Jika f fungsi non-negatif dan terintegral-RL pada* $[a,b]$ *dan* $[c,d] \subseteq [a,b]$ *maka f terintegral-RL pada* $[c,d]$.

Bukti: Diberikan $\varepsilon > 0$ dan $\eta > 0$ sebarang. Karena *f* terintegral-*RL* pada $[a,b]$, berarti terdapat konstanta $\delta > 0$ dan himpunan terbuka *G*, dengan $|G| < \eta$ dan untuk setiap partisi $\mathfrak{D}^* = \{([u,v];x)\} = \{([u_i,v_i];x_i), i = 1,2,\dots,p\}$, dan $\mathfrak{D}^{**} = \{([u,v];x)\} = \{([u_i,v_i];x_i), i = 1,2,\dots,q\}$, dengan $0 < v-u < \delta$ dan $x \in [u,v] \setminus G$ berlaku

$$\left|(\mathfrak{D}^*)\sum_{x\notin G} f(x)(v-u) - (\mathfrak{D}^{**})\sum_{x\notin G} f(x)(v-u)\right| < \varepsilon.$$

Namakan $\mathfrak{D}_*, \mathfrak{D}_c$, dan $\mathfrak{D}_d$ berturut-turut merupakan partisi pada $[c,d]$, pada $[a,c]$, dan pada $[d,b]$. Kemudian $\mathfrak{D}_{**}$ partisi lainnya pada $[c,d]$. Diperhatikan bahwa, $\mathcal{P} = \mathfrak{D}_* \cup \mathfrak{D}_c \cup \mathfrak{D}_d$ dan $\mathcal{P}_* = \mathfrak{D}_{**} \cup \mathfrak{D}_c \cup \mathfrak{D}_d$ merupakan partisi pada $[a,b]$. Dengan demikian maka diperoleh

$$\left|(\mathfrak{D}_*)\sum_{x\notin G} f(x)(v-u) - (\mathfrak{D}_{**})\sum_{x\notin G} f(x)(v-u)\right|$$
$$= \left|(\mathcal{P})\sum_{x\notin G} f(x)(v-u) - (\mathcal{P}_*)\sum_{x\notin G} f(x)(v-u)\right| < \varepsilon.$$

Berdasarkan Kreteria Cauchy, *f* terintegral-*RL* pada $[c,d]$.

Teorema 2.5 *Diberikan f fungsi non-negatif pada*$[a,b]$. *Jika f terintegral-RL pada* $[a,c]$ *dan f terintegral-RL pada* $[c,b]$ *maka f terintegral-Rl pada* $[a,b]$. *Lebih lanjut*

$$(RL)\int_a^b f = (RL)\int_a^c f + (RL)\int_c^b f.$$

Berdasarkan Teorema 3.4, dapat didefinisikan primitif-*RL* atas fungsi terintegral-*RL* pada $[a,b]$ sebagai berikut.

Definisi 2.6 *Diberikan f fungsi non-negatif pada* $[a,b]$ *dan f terintegral-RL pada* $[a,b]$. *Fungsi* $F:[a.b]\longrightarrow\Re$ *disebut fungsi primitif dari fungsi yang terintegral-RL pada* $[a.b]$, *jika f terintegral pada* $[a,x]$, *dengan* $a\le x\le b$ *dan dituliskan*

$$F(x)=(RL)\int_a^x f\,(x)dx,$$

untuk *setiap* $x\in[a.b]$. *Selanjutnya, F disebut primitif-RL fungsi f pada* $[a,b]$.
Setelah didefinisikan primitif-*RL* atas fungsi terintegral-*RL* pada $[a,b]$, integral-*RL* dapat didefinisikan sebagai berikut.

SIMPULAN

Dalam penelitian ini telah berhasil mengkonstruksi sifat-sifat integral-*RL* pada $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ dengan tetap mempertahankan sifat-siafat integral Henstock pada selang yang sama, dengan demikian integral-*RL* memiliki ekuivalensi dengan integral Henstock.

DAFTAR PUSTAKA

Lee, P. Y., 1989. *Lanzhou Leactures on Henstock Integration*, World Scientific, Singapore

Lee, P. Y, dan Výborný, R., 1999. *Integral: An Easy Approach after Kurzweil and Henstock*, Cambridge University Press, New York, USA

Pfeffer, W. F., 1993. *The Riemann Approach to Integration*, Cambridge University Press, New York, USA