IDEAL DALAM ALJABAR LINTASAN LEAVITT

Ida Kurnia Waliyanti
Program Studi Pendidikan Matematika
Jurusan Pendidikan MIPA FKIP Universitas Khairun
Email: adhinku@gmail.com

ABSTRAK

Graf dapat dipandang sebagai aljabar lintasan dan jika graf tersebut diperluas dapat didefinisikan suatu aljabar lintasan Leavitt, yang pada kenyataannya merupakan $\mathbb{Z}-$aljabar bertingkat. Selanjutnya akan dibahas pembentukan ideal dalam aljabar lintasan Leavitt, yang dibangun oleh himpunan bagian titik-titik yang herediter dan tersaturasi. Dengan membentuk graf baru dari suatu graf yang diberikan, dapat disimpulkan bahwa ideal bertingkat dari suatu aljabar lintasan Leavitt merupakan aljabar lintasan Leavitt juga.

Kata Kunci : Ideal Bertingkat, Herediter, Saturasi, Aljabar Lintasan Leavitt

PENDAHULUAN

Graf merupakan objek kombinatorial yang terdiri dari garis-garis (*edges*) dan titik-titik (*vertex*). Graf berarah dapat dipandang sebagai pasangan 4-*tupel* yang terdiri dari dua himpunan dan dua pemetaan. Himpunan yang dimaksud adalah himpunan titik dan himpunan garis. Sedangkan pemetaannya adalah pemetaan dari himpunan garis ke himpunan titik, yang masing-masing daerah hasilnya disebut sebagai sumber/asal (*source*) dan ujung/target (*range*) dari suatu garis dalam graf. Dengan didefinisikannya operasi perkalian pada himpunan semua lintasan dalam graf, himpunan ini mempunyai struktur semigrup. Selanjutnya untuk sebarang lapangan K dan graf E dapat didefinisikan suatu K-aljabar yang disebut dengan aljabar lintasan atas lapangan K pada E yang memiliki basis himpunan semua lintasan yang ada pada graf tersebut. Hal ini sejalan dengan pernyataan Passman dalam [6] dan Wisbauer dalam [7], bahwa apabila diberikan sebarang grup, bahkan semigrup terhadap operasi perkalian dan sebarang lapangan K, maka dapat didefinisikan K-aljabar asosiatif.

Aljabar lintasan merupakan aljabar atas lapangan dengan basis himpunan semua lintasan yang ada pada graf. Dalam hal ini graf dipandang secara aljabar, bukan sebagai objek kombinatorial. Selain itu graf dapat diperluas sehingga terbentuk graf baru yang disebut graf perluasan. Salah satu ide perluasan dilakukan oleh Leavitt dengan menambahkan adanya garis yang berlawanan arah dengan garis yang ada pada graf.

Setiap garis yang ada pada graf akan berpasangan dengan garis baru yang dibentuk yang disebut dengan garis hantu. Ide perluasan ini dapat dilihat dalam [1] dan [2]. Dari sini dapat didefinisikan suatu aljabar lintasan atas lapangan pada graf perluasan, yang disebut dengan aljabar lintasan Leavitt.

Sementara ide pembentukan graf baru yang menjadi dasar acuan ideal bertingkat sebagai aljabar lintasan Leavitt dikaji dari [3]. Tulisan ini akan mengkaji definisi aljabar lintasan dan aljabar lintasan Leavitt yang difokuskan pada himpunan bagian dari titik-titik yang ada dalam graf dan hubungannya dengan pembentukan ideal dalam aljabar lintasan Leavitt. Himpunan bagian yang dimaksud adalah himpunan bagian herediter dan tersaturasi. Kemudian akan diselidiki pula apakah ideal dalam aljabar lintasan Leavitt juga merupakan aljabar lintasan Leavitt. Beberapa lemma akan diberikan tanpa bukti, pembaca dapat melihat pada referensi yang dirujuk.

KAJIAN TEORI

1. Aljabar Lintasan dan Aljabar Lintasan Leavitt

Pembahasan diawali dengan memandang graf berarah $E = (E^0, E^1, s, r)$ (selanjutnya cukup disebut graf saja) seperti yang dinyatakan Assem [3] sebagai 4-*tupel* yang memuat himpunan *countable* E^0 dan E^1 serta fungsi-fungsi $s, r : E^1 \to E^0$. Elemen-elemen di E^0 disebut titik dan elemen-elemen di E^1 disebut garis. Untuk setiap garis e, $s(e)$ merupakan *source* (sumber) dari e, dan $r(e)$ merupakan *range* (ujung) dari e. Jika $s(e) = v$ dan $r(e) = w$ maka dikatakan bahwa v *emit* (memancarkan) e dan w menerima e atau e menuju w. Titik $v \in E^0$ disebut *sink* jika untuk setiap $e \in E^1$, v tidak memancarkan e (v *sink* $\Leftrightarrow v \neq s(e)$). Graf E dikatakan *row-finite graph* (graf baris-berhingga) jika untuk setiap $v \in E^0$ himpunan $s^{-1}(v)$ berhingga. Hal ini menunjukkan bahwa himpunan garis E^1 dalam E berhingga jika E^0 juga berhingga. Selanjutnya dikatakan graf E berhingga jika E^0 berhingga. Graf yang disebut dalam paper ini adalah *row-finite graph* yang selebihnya disebut graf berhingga.

Lintasan dan *cycle* merupakan istilah dasar dalam graf yang banyak digunakan. Lintasan μ dalam graf E adalah barisan garis-garis, $\mu = \mu_1 \ldots \mu_n$ sedemikian sehingga $r(\mu_i)=s(\mu_{i+1})$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Dengan kata lain $s(\mu) = s(\mu_1)$ merupakan sumber dari μ dan $r(\mu) = r(\mu_n)$ merupakan *range* dari μ. Panjang lintasan $\mu = \mu_1 \ldots \mu_n$ adalah n dinotasikan $l(\mu) = n.$ Lintasan μ disebut *cycle*, jika $r(\mu) = s(\mu)$ dan $s(\mu_i) \neq$

$s(\mu_j)$ untuk setiap $i \neq j$ (sumber dan *range*nya berimpit) dan *cycle* dengan panjang 1 dinamakan *loop*. Graf yang tidak memuat *cycle* disebut graf asiklis (*acyclic graph*).

Komposisi lintasan dapat mendefinisikan operasi perkalian pada himpunan semua lintasan suatu graf. Akan digunakan operasi tersebut untuk mendefinisikan suatu aljabar.

Definisi 2.1 [1: Def 1.1] *Diberikan lapangan K dan graf* $E = (E^0, E^1, s, r)$. *Didefinisikan aljabar lintasan pada graf E atas lapangan K sebagai K-aljabar yang bebas (free), dengan basis himpunan lintasan-lintasan dalam E dan memenuhi syarat*

a. $v_i v_j = \delta_{ij} v_i$ *untuk setiap* $v_i, v_j \in E^0$

b. $e_i = e_i r(e_i) = s(e_i) e_i$ *untuk setiap* $e_i \in E^1$

Aljabar lintasan tersebut belum cukup untuk mendefinisikan aljabar lintasan Leavitt, karena dibutuhkan graf *E* yang diperluas yang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.2 [1:Def 1.2] *Diberikan graf* $E = (E^0, E^1, s, r)$. *Perluasan graf E merupakan graf baru yang ditulis* $\hat{E} = (E^0, E^1 \cup (E^1)^*, s', r')$ *dimana* $(E^1)^* = \{e_i^* : e_i \in E^1\}$ *dan fungsi r' dan s' didefinisikan sebagai:*

$$r'\big|_{E^1} = r\ ;\ s'\big|_{E^1} = s\ ;\ r'(e_i^*) = s(e_i)\ \text{dan}\ s'(e_i^*) = r(e_i)$$

Selanjutnya akan diberikan definisi aljabar lintasan Leavitt atas lapangan *K* yang merupakan aljabar lintasan pada graf perluasan dan memenuhi dua aksioma, berikut :

Definisi 2.3[1: Def 1.3]: *Diberikan lapangan K dan graf berhingga (row-finite graph) E. Aljabar lintasan Leavitt dari E dengan koefisien dalam lapangan K didefinisikan sebagai aljabar lintasan pada graf perluasan* $\hat{E}$ *yang memenuhi syarat* ***Cuntz-Krieger** :*

(CK1) $e_i^* e_j = \delta_{ij} r(e_j)$ *untuk setiap* $e_j \in E^1; e_i^* \in (E^1)^*$

(CK2) $v_i = \sum_{(e_j \in E^1; s(e_j) = v_i)} e_j e_j^*$ *untuk setiap* $v_i \in E^0$ *dengan* v_i *bukan sink.*

Aljabar lintasan Leavitt ini dinotasikan dengan $L_K(E)$ atau lebih umum ditulis $L(E)$.

Kondisi CK2 adalah syarat ***Cuntz-Krieger*** pada v_i yang bukan *sink*, artinya $\exists e_j \in E^1$ sehingga $v_i = s(e_j)$. Dengan kata lain, jika v_i *sink* maka tidak disyaratkan sifat CK2. Memperhatikan kondisi CK1 dan CK2 pada Definisi 2.3, jelas bahwa aljabar $L(E)$ dapat dijabarkan sebagai *K*-ruang vektor oleh monomial dalam bentuk $\{pq^* \mid p,q$ lintasan dalam E, $r(p) = r(q)\}$, dimana jika $q = q_1 \dots q_n$ dikatakan dengan lintasan nyata maka $q^* = q_n^* \dots q_1^*$ disebut lintasan hantu. Aljabar $L(E)$ memuat semua titik (lintasan yang panjangnya nol), lintasan nyata, dan lintasan hantu. Secara eksplisit dinyatakan dalam lemma berikut :

Lemma 2.4 [2: Lemma 4.1.17]**:** *Setiap monomial dalam aljabar lintasan Leavitt L(E) berbentuk:*

(i) $k_i v_i$ *dengan* $k_i \in K$ *dan* $v_i \in E^0$ *; atau*

(ii) $ke_{i_1}\dots e_{i_\sigma} e^*_{j_1}\dots e^*_{j_\tau}$ *di mana* $k \in K$ *;* $\sigma, \tau \geq 0$*;* $\sigma + \tau > 0$*;* $e_{i_s} \in E^1$ *dan* $e^*_{j_t} \in (E^1)^*$ *untuk* $0 \leq s \leq \sigma$, $0 \leq t \leq \tau$.

Selanjutnya akan dibahas sifat dasar aljabar lintasan Leavitt untuk mengkaji sifat penting lainnya. Sifat dasar yang dimaksud dinyatakan dalam lemma berikut:

Lemma 2.5 [1: Lemma 1.5 dan 1.6] *Diberikan graf E dan lapangan K serta L(E) aljabar lintasan Leavitt atas lapangan K, maka dipenuhi :*

(i) Jika himpunan titiks E^0 *berhingga maka L(E) merupakan K-aljabar unital (aljabar dengan elemen satuan)*

(ii) L(E) merupakan $\mathbb{Z}-$*aljabar bertingkat (*$\mathbb{Z}-$*graded algebra*

*(iii) Sebarang himpunan dari lintasan-lintasan yang berbeda merupakan himpunan independen linear terhadap K (**K-linearly independent**) dalam L(E).*

Setelah dibicarakan beberapa sifat-sifat dasar aljabar lintasan Leavitt, akan dibahas secara khusus ideal yang dibangun oleh himpunan bagian dari titik-titik di *E*.

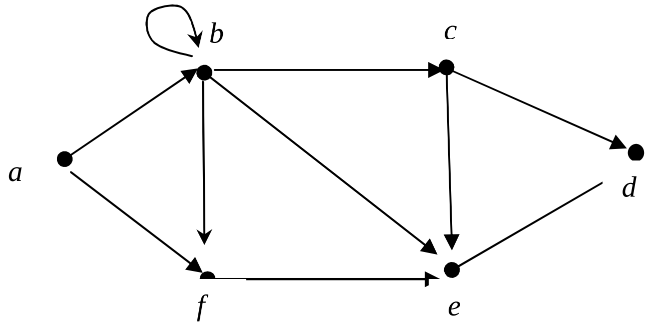
2. Himpunan Bagian Herediter dan Tersaturasi

Pembahasan ideal dalam aljabar lintasan Leavitt diawali dengan pengenalan himpunan bagian titik-titik suatu graf secara khusus, yaitu herediter dan saturasi. Diberikan graf *E*, untuk $n \geq 2$, dinotasikan E^n sebagai himpunan lintasan yang panjangnya *n*, dan $E^* = \bigcup_{n\geq 0} E^n$ merupakan himpunan semua lintasan dalam graph *E*. Kemudian didefinisikan suatu relasi "$\geq$" dalam E^0, dengan ketentuan $(\forall v, w \in E^0)$ $v \geq w$, jika terdapat $\mu \in E^*$ dengan $s(\mu) = v$ dan $r(\mu) = w$. Kemudian didefinisikan himpunan bagian pada E^0 sebagai berikut.

Definisi 3.1: *H himpunan bagian dari* E^0 *dikatakan herediter jika* $(\forall v, w \in E^0)$ $v \geq w, v \in H \Rightarrow w \in H$. *H himpunan bagian dari* E^0 *dikatakan tersaturasi jika* $\left(\forall v \in E^0\right) s^{-1}(v) \neq \varnothing$ *dan* $r(s^{-1}(v)) \subseteq H \Rightarrow v \in H$.

Kondisi tersebut dapat digambarkan dengan contoh berikut:

Contoh 3.2:



Dari gambar di atas diperoleh {*c*,*d*,*e*,*f*} merupakan himpunan bagian yang herediter dan tersaturasi, {*b*,*c*,*d*,*e*,*f*} herediter tapi tidak saturasi,{*a*,*b*,*c*,*f*} tersaturasi tapi tidak herediter dan {*b*,*c*,*f*} tidak herediter maupun tersaturasi.

Koleksi semua himpunan bagian dari E^0 herediter dan tersaturasi dinotasikan □. Sebagai contoh diberikan graf *E*, maka suatu himpunan bagian dari E^0 yang terherediter saturasi secara trivial adalah himpunan kosong dan E^0 sendiri. Kemudian diberikan definisi pohon yang memuat titik *v* dan merupakan himpunan bagian herediter terkecil yang memuat *v*.

Lemma 3.3: *Tree dari v didefinisikan* $T(v)=\left\{w\in E^0 \,\middle|\, v\geq w\right\}$ *merupakan himpunan bagian herediter terkecil di* E^0 *yang memuat v.*

Pernyataan dalam lemma 3.3 dapat diperluas untuk suatu himpunan $X\subseteq E^0$, dinyatakan dalam lemma berikut.

Lemma 3.4: *Diberikan* $X\subseteq E^0$. *Didefinisikan tree yang memuat X, adalah* $T(X)=\bigcup_{x\in X}T(x)$. $T(X)$ *merupakan himpunan bagian* E^0 *yang herediter.*

Definisi 2.3 dan lemma 2.5 menyatakan bahwa elemen dari *L*(*E*) merupakan kombinasi linier dari elemen dalam $\left\{v:v\in E^0\right\}\cup\left\{e,e^*:e\in E^1\right\}$ dengan koefisien dari lapangan *K*. Misalnya diberikan dua lintasan dalam *L*(*E*) dan dilakukan operasi diantara keduanya, maka sebagai akibat dari CK1$\left(\beta^*\gamma=\delta_{\beta\gamma}r(\beta)\right)$ akan muncul beberapa kondisi, yaitu $\beta^*\gamma$ sebagai lintasan nyata, $\beta^*\gamma$ sebagai lintasan hantu, $\beta^*\gamma$ sebagai suatu titik, atau lintasan tersebut tidak terhubung (menyambung). Lebih jelasnya pernyataan ini akan disajikan dalam lemma berikut.

Lemma 3.5 [5: Lemma 3.1]**:** *Jika E adalah suatu graph dan L*(*E*) *merupakan Aljabar Lintasan Leavitt, maka untuk suatu* $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in E^*$ *akan berlaku:*

$$(\alpha\beta^*)(\gamma\delta^*) = \begin{cases} \alpha\gamma'\delta^* & , jika\ \gamma=\beta\gamma' \\ \alpha\delta^* & , jika\ \beta=\gamma \\ \alpha\beta'^*\delta^* & , jika\ \beta=\gamma\beta' \\ 0 & , yang\ lain \end{cases}$$

Lemma di atas akan dijadikan acuan untuk membuktikan pernyataan yang berkaitan dengan perkalian dua lintasan atau lebih. Seperti dalam teorema mengenai pembangunan ideal bertingkat.

4. Ideal dalam Aljabar Lintasan Leavitt

Aljabar lintasan Leavitt merupakan aljabar bertingkat lebih tepatnya $\mathbb{Z}-$aljabar bertingkat. Akan dibahas mengenai ideal pada aljabar tersebut. Misal *I* adalah ideal kiri $\mathbb{Z}-$aljabar bertingkat disebut ideal bertingkat kiri, ditunjukkan dengan $I = \sum_{\sigma\in Z}(I \cap L(E)_\sigma).$ Ini berarti untuk $y \in I,$ jika didekomposisikan dalam elemen homogennya dapat ditulis $y = \sum_{\sigma\in Z} y_\sigma,$ maka $y_\sigma \in I.$ Dengan cara yang sama dapat didefinisikan ideal bertingkat kanan dan yang memenuhi keduanya disebut ideal bertingkat. Dalam bagian ini akan dibahas mengenai bentuk ideal bertingkat dalam aljabar lintasan Leavitt, khususnya yang dibangun oleh himpunan bagian E^0. Didefinisikan dulu bahwa suatu ideal yang dibangun oleh *H* merupakan kombinasi linear dari monomial-monomial yang melewati titik di *H*. Kemudian akan ditunjukkan pembentukkan ideal bertingkat dalam *L*(*E*).

Lemma 4.1 *Diberikan grap E. H adalah himpunan bagian dari* E^0 *yang terherediter tidak harus saturasi. Maka ideal yang dibangun oleh H adalah* $I(H) = \left\{\sum k\alpha\beta^* \,\middle|\, k \in K, \alpha,\beta \in E^*, r(\alpha) = r(\beta) \in H\right\}$ *Selanjutnya I(H) merupakan ideal bertingkat.*

Lemma 4.1 menjelaskan mengenai ideal yang dibangun oleh himpunan bagian herediter dari E^0. Selain herediter juga terdapat himpunan bagian dari E^0 yang tersaturasi, yang juga membangun ideal di *L*(*E*). Ternyata titik dalam suatu ideal juga membentuk himpunan bagian herediter tersaturasi di E^0, dinyatakan dalam lemma berikut.

Lemma 4.2: *Untuk setiap ideal I dari aljabar lintasan Leavitt L(E),* $I \cap E^0$ *merupakan himpunan bagian herediter dan saturasi dari* E^0.

Bukti: Terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa $I \cap E^0$ herediter. Diambil sebarang $v, w \in E^0$ sedemikian sehingga $v \in I$ dan $v \geq w$, akan ditunjukkan bahwa $w \in I$. Diberikan lintasan $\mu = \mu_1\mu_2...\mu_n$ sedemikian hingga $s(\mu_1) = v$ dan $r(\mu_n) = w$. Karena I Ideal dan $v \in I$, maka $\mu_1^* v \mu_1 \in I$, sehingga akan diperoleh $\mu_1^* v \mu_1 = \mu_1^* \mu_1 \ = r(\mu_1)$ $= s(\mu_2) \in I$. Akibatnya $\mu_2^* s(\mu_2)\mu_2 \in I$, dan akan diperoleh $\mu_2^* s(\mu_2)\mu_2 = \mu_2^* \mu_2 \ = r(\mu_2)$ $= s(\mu_3) \in I$. Proses dilakukan sampai $\mu_{n-1}^* s(\mu_{n-1})\mu_{n-1} = \mu_{n-1}^* \mu_{n-1} \ = r(\mu_{n-1}) = s(\mu_n) = w.$ Jadi $w \in I$, artinya $I \cap E^0$ herediter. Kemudian akan ditunjukkan bahwa $I \cap E^0$ saturasi. Diambil sebarang $v \in E^0$ dengan $s^{-1}(v) \neq \varnothing$ dan $\{r(e) | s(e) = v\} \subseteq I$, akan ditunjukkan $v \in I$. Dari $s^{-1}(v) \neq \varnothing$ maka v tidak *sink*, jadi berlaku sifat CK2. Jika diambil sebarang e_j sedemikian hingga $s(e_j) = v$, karena $\{r(e) | s(e) = v\} \subseteq I$ maka $r(e_j) \in I$, lebih lanjut $e_j = e_j r(e_j) \in I$, jadi $e_j \in I$. Karena v tidak *sink* dipenuhi sifat CK2 sehingga untuk sebarang e_j yang diambil tadi berlaku $e_j e_j^* = v, e_j \in I$, jadi $e_j e_j^* \in I$, artinya $v \in I$. Jadi $I \cap E^0$ saturasi. □

Lemma 4.1 dan 4.2 di atas menjadi dasar bahwa semua ideal bertingkat dari suatu aljabar lintasan Leavitt berasal dari himpunan bagian titik-titik yang herediter dan tersaturasi. Uraian di atas banyak membahas tentang ideal bertingkat di *L(E)*. Dari sini muncul pertanyaan apakah setiap ideal bertingkat dari suatu aljabar lintasan Leavitt juga merupakan aljabar lintasan Leavitt. Pertanyaan ini akan dijawab melalui beberapa lemma dan teorema yang diawali dengan pendefinisian mengenai *quotient* dari aljabar lintasan Leavitt dan beberapa definisi lainnya, walaupun *quotient* tidak dibahas dalam paper ini.

Definisi 4.3 [4]**:** *Diberikan graph E dan himpunan bagian herediter H dari* E^0.

1)*Grap quotient dinotasikan sebagai E/H dan didefinisikan:*

$$\left(E^0 \setminus H, \left\{e \in E^1 \middle| r(e) \notin H\right\}, r\big|_{(E/H)^1}, s\big|_{(E/H)^1}\right)$$

2)*Grap pembatasan dinotasikan* E_H *dan didefinisikan:*

$$\left(H, \left\{e \in E^1 \middle| r(e) \in H\right\}, r\big|_{(E_H)^1}, s\big|_{(E_H)^1}\right)$$

 ISSN 2089-855X

Berikut disajikan definisi mengenai elemen dalam $L(E)$ yang hanya memuat *garis nyata* atau hantu saja.

Definisi 4.4 [5:Def 3.3]: *Dikatakan bahwa* $x \in L(E)$ *merupakan polinomial dalam semua garis nyata jika* $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k, \lambda_k \in K, \alpha_k \in E^*$. *Dikatakan bahwa* $x \in L(E)$ *merupakan polinomial dalam semua garis ghost jika* $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \beta_k^*, \lambda_k \in K, \beta_k \in E^*$.

Definisi di atas memberikan pemikiran apakah sifat polinomial dalam garis nyata saja juga berlaku dalam garis hantu saja, sehingga perlu diberikan suatu involusi seperti dalam lemma berikut ini.

Lemma 4.5[1:Lemma 3.4]**:** *Diberikan graf E. Didefinisikan sebuah involusi linear* $x \to \overline{x}$ *pada* $L(E)$ *sebagai berikut:*

1. $\overline{k_i v_i} = k_i v_i, k_i \in K, v_i \in E^0$,
2. $\overline{k e_{i_1} \dots e_{i_\sigma} e_{j_1}^* \dots e_{j_\tau}^*} = k e_{j_\tau} \dots e_{j_1} e_{i_\sigma}^* \dots e_{i_1}^*, k_i \in K, \sigma, \tau \geq 0, \sigma + \tau > 0, e_{i_s}, e_{j_t} \in E^1$,

Lintasan-lintasan yang berakhir di H dapat dikumpulkan dalam himpunan $F_E(H)$. Dari sini dapat dibuat graf baru, lebih jelasnya dinyatakan dalam definisi berikut.

Definisi 4.6[4:Def 1.1]**:** *Diberikan graph E dan* $\emptyset \neq H \in \mathbf{H}_E$. *Didefinisikan*

$$F_E(H) = \{\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n) \in E^n \mid n \geq 1, s(\alpha_1) \in E^0 \setminus H, r(\alpha_i) \in E^0 \setminus H (\forall i < n), r(\alpha_n) \in H\}$$

Diberikan $\overline{F_E(H)} = \{\overline{\alpha} \mid \alpha \in F_E(H)\}$.

Selanjutnya didefinisikan grap baru ${}_H E = ({}_H E^0, {}_H E^1, s', r')$ *dengan:*

1. ${}_H E^0 = H \cup F_E(H)$
2. ${}_H E^1 = \{e \in E^1 \mid s(e) \in H\} \cup \overline{F_E(H)}$ 3. $(\forall \in E^1) s(e) \in H, s'(e) = s(e)$ *dan* $r'(e) = r(e)$
4. $\forall \overline{\alpha} \in \overline{F_E(H)}, s'(\overline{\alpha}) = \alpha$ *dan* $r'(\overline{\alpha}) = r(\alpha)$

Bagian sebelumnya telah dikemukakan mengenai ideal yang dibangun oleh *H*, yang dinotasikan dengan *I(H)*. Jika dihubunganka dengan graf yang baru saja dibentuk, diperoleh hubungan yang disajikan dalam lemma berikut ini.

Lemma 4.7: *Diberikan graf E. Untuk setiap H, himpunan bagian E^0 yang herediter dan saturasi, ideal I(H) isomorfis dengan* $L({}_H E)$.

Bukti: Dibentuk suatu pemetaan $\phi : L({}_H E) \to I(H)$ yang didefinisikan sebagai berikut:

i. $(\forall v \in H)\phi(v) = v$

ii. $(\forall \alpha \in F_E(H))\phi(\alpha) = \alpha\alpha^*$

iii. $(\forall e \in E^1)(s(e) \in H)\phi(e) = e$ dan $\phi(e^*) = e^*$

iv. $\left(\forall \overline{\alpha} \in \overline{F_E(H)}\right)\phi(\overline{\alpha}) = \alpha$ dan $\phi(\overline{\alpha^*}) = \alpha^*$

Akan terlebih dahulu ditunjukkan bahwa ϕ *well-defined*. Dari ketentuan dalam mendefinisikan pemetaan ϕ jelas bahwa ϕ memenuhi *well-defined*. Perhatikan bahwa *image* dari pembangun $L({}_H E)$ memenuhi relasi pendefinisian $L({}_H E)$. Sekarang akan ditunjukkan bahwa ϕ surjektif. Cukup dengan menunjukkan bahwa setiap titik di H dan setiap lintasan berhingga yang berakhir di H merupakan *image* dari ϕ. Yang pertama diambil sebarang $v \in H$, menurut ketentuan (i) jelas bahwa $v = \phi(v)$. Dari sini bagian pertama terbukti. Kemudian diambil sebarang $\alpha = (\alpha_1 ... \alpha_n)$, dengan $\alpha_i \in E^1$. Dari sini akan terjadi beberapa kemungkinan, yaitu jika $s(\alpha_1) \in H$ maka menurut perluasan dari ketentuan (iii) dan karena ϕ suatu morphis diperoleh $\phi(\alpha) = \alpha = \phi(\alpha_1)...\phi(\alpha_n)$. Jadi dapat dikatakan bahwa α merupakan *image* ϕ. Kemungkinan lainnya adalah jika $s(\alpha_1) \in E^0 \setminus H$ dan $r(\alpha_n) \in H$ maka terdapat $1 \le j \le n-1$, sedemikian hingga $r(\alpha_j) \in E^0 \setminus H$ dan $r(\alpha_{j+1}) \in H$. Akibatnya $\alpha = (\alpha_1 ... \alpha_{j+1})(\alpha_{j+2} ... \alpha_n)$, atau dapat ditulis juga $\alpha = \beta(\alpha_{j+2} ... \alpha_n)$ untuk suatu $\beta = (\alpha_1 ... \alpha_{j+1}) \in F_E(H)$. Sehingga menurut ketentuan (iv) $\alpha = \phi(\overline{\beta})\phi(\alpha_{j+2} ... \alpha_n)$. Dengan kata lain untuk setiap α merupakan image dari ϕ. Dengan demikian terbukti bahwa ϕ surjektif. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa ϕ injektif. Perhatikan ketentuan (ii) yaitu $(\forall \alpha \in F_E(H))\phi(\alpha) = \alpha\alpha^*$, padahal menurut ketentuan (iv) dan sifat morpisme didapatkan $\alpha\alpha^* = \phi(\overline{\alpha})\phi\left(\overline{\alpha^*}\right) = \phi\left(\overline{\alpha}\overline{\alpha^*}\right)$ sehingga $\phi(\alpha) = \phi\left(\overline{\alpha}\overline{\alpha^*}\right)$, atau $\alpha = \overline{\alpha}\overline{\alpha^*}$. Akibatnya untuk setiap $t \in L({}_H E)$ dapat dituliskan:

$$t = \sum_{\alpha,\beta \in F_E(H)} \overline{\alpha} a_{\alpha,\beta} \overline{\beta^*},\ a_{\alpha,\beta} \in L(E_H).\ ......\ (1)$$

Untuk menunjukkan ϕ injektif, cukup dengan menunjukkan bahwa $Ker(\phi) = 0$. Diandaikan $Ker(\phi) \neq 0$, maka dapat diambil sebarang $0 \neq t \in Ker(\phi)$ dan bisa dituliskan seperti dalam (1). Menurut ketentuan (iv) diperoleh:

$$0=\phi(t)=\phi\left(\sum_{\alpha,\beta\in F_E(H)}\overline{\alpha}\,a_{\alpha,\beta}\,\overline{\beta^*}\right)=\sum_{\alpha,\beta\in F_E(H)}\alpha a_{\alpha,\beta}\beta^* \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Kemudian diambil sebarang $\alpha_0\in F_E(H)$ dengan panjang maksimal dalam (2), maka untuk $\alpha\in F_E(H)$ yang lain dalam pernyataan yang sama (2), akan berlaku:

$$\alpha_0^*.\alpha=\begin{cases}0 & \text{jika } \alpha\neq\alpha_0\\ r(\alpha_0) & \text{jika } \alpha=\alpha_0\end{cases}\;\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

sehingga akan diperoleh:

$$0=\sum_{\alpha,\beta\in F_E(H)}\alpha_0^*\alpha a_{\alpha,\beta}\beta^*=\sum_{\beta\in F_E(H)}a_{\alpha_0,\beta}\beta^* \;..(4)$$

Sekarang, diberikan $\beta_0\in F_E(H)$ dengan panjang maksimal dalam (4). Dengan argumen yang sama seperti pada (3) diperoleh:

$$0=\sum_{\beta\in F_E(H)}a_{\alpha_0,\beta}\beta^*\beta_0=a_{\alpha_0,\beta_0}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

Tapi menurut hipotesa awal $0\neq a_{\alpha_0,\beta_0}$ sehingga terjadi kontradiksi. Jadi pengandaian harus diingkar. Yang benar $Ker(\phi)=0.$ Akibatnya terbukti bahwa ϕ injektif. Dengan demikian terbukti bahwa *I(H)* isomorfis dengan $L\left({}_H E\right)$.□

Teorema ini merupakan hasil utama dalam pembahasan paper ini. Dari sini dapat diketahui bahwa *I*(*H*) isomorfik dengan suatu aljabar lintasan Leavitt $L\left({}_H E\right)$. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa *I*(*H*) merupakan aljabar lintasan Leavitt.

KESIMPULAN

Ideal bertingkat suatu aljabar lintasan Leavitt dapat dibangun oleh himpunan bagian dari titik-titik yang mempunyai sifat herediter dan tersaturasi. Selanjutnya dapat disimpulkan bahwa ideal-ideal tersebut juga merupakan aljabar lintasan Leavitt.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Abrams, G., Aranda Pino, G., 2005, *Leavitt Path Algebra of a Graph*, J. Algebra 293 (2), 319 – 334.

[2] Aranda Pino, G.,2005, *On Maximal Left Quotient Systems and Leavitt Path Algebras*, Tesis Doctoral, Univesidad de Malaga

[3] Aranda Pino, E. Pardo, *Stable rank of Leavitt path algebras*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 136 (2008), no. 7, 2375-2386.

[4] Assem, I., Simson, D. & Skowronski, A., *Elemens of the Representation Theory of Associative Algebras,* London Math.Soc Student Text 65. Cambridge University Press, 2005

[5] Passman, D., 1977, *The Algebraic Structure of Graoup Rings,* A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Son, New York

[6] Tomforde, M., 2007, *Uniquenese Theorems and Ideal Structure for Leavitt Algebras, J. Algebra*, 318, 270-299.

[7] Wisbauer, Robert, 1991, *Foundation of Module and Ring Theory,* University of Dusseldorf, Dusseldorf