

## MODEL PERAMBATAN PANAS SECARA MATEMATIKA PADA PROSES PEMANASAN KUE BAGEA KENARI

**Hasan Hamid**

Program Studi Pendidikan Matematika  
Jurusan Pendidikan MIPA FKIP Universitas Khairun  
Email:hasan.hamid@rocketmail.com

### ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan mempelajari dan menjelaskan bagaimana dinamika perambatan panas yang terjadi pada pusat bagea kenari yang berbentuk tabung. Proses pengeringan/pemanasan dengan suhu tinggi secara matematika dapat dimodelkan ke dalam persamaan diferensial parsial yaitu persamaan panas dengan syarat awal dan syarat batas. Dari hasil kajian diperoleh solusi analitik persamaan panas untuk pusat tabung diberikan oleh

$$y(t) - u(0,0,t) - 1 - \frac{8}{\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \exp \left( \left( \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{L^2} + \lambda_m^2 \right) t \right) \frac{(-1)^2}{\lambda_m J_1(\lambda_m R) (2n+1)}$$

Selanjutnya dengan menggunakan metode beda hingga diperoleh bentuk khusus sebagai berikut:

$$u(r, z, t + \Delta t) = u(r, z, t) + v_1 (u(r + \Delta r, z, t) - 2u(r, z, t) + u(r - \Delta r, z, t)) + \frac{1}{n} (u(r + \Delta r, z, t) - u(r, z, t))$$

dengan syarat awal dan syarat batas berikut:

$$u(r,0) = 0, \quad 0 \leq r \leq 1$$

$$u(1,0) = 0, \quad 0 \leq t < \infty$$

**Kata kunci:** Perambatan Panas, Matematika, Kue Bagea Kenari

### PENDAHULUAN

Dilihat dari perjalanan sejarah Kota Ternate, maka kita tidak bisa mengelak bahwa kota Ternate adalah salah satu kota yang terkenal dengan penghasil rempah-rempah yang cukup kesohor di dunia. Disamping penghasil rempah-rempah Kota Ternate juga terkenal dengan ciri khas panganan makanan ringan seperti Bagea Kenari (Bagea Ternate). Bagea Kenari ini diproduksi oleh Keluarga sebagai suatu usaha yang menjanjikan secara turun temurun. Dalam industri makanan seperti ini, masalah yang sangat penting yang harus dihadapi dan juga termasuk proses produksi adalah masalah pemanasan (pengawetan). Kue yang dikemas secara besar-besaran itu memiliki nilai jual yang sangat tinggi apabila kualitasnya mampu dipertahankan. Dengan kata lain, secara

higienes pemanasan(pengawetan) Bagea Kenari dapat mencegah terjadinya proses pembusukan oleh mikroorganisme.

Kue Bagea Kenari yang telah dikemas/diproses memiliki citra rasa yang khas, dengan bentuknya seperti tabung dalam ukuran yang kecil serta memiliki keunikan bentuk yang sangat keras dan cukup tahan lama apabila disimpan ditempat yang kering. Makanan bagea kenari yang kami maksudkan dalam penelitian disini dibuat dari sagu dan dicampur dengan kenari atau sering disebut “Bagea Ternate”.

Kue bagea kenari ini biasanya dijadikan ole-ole bagi mereka yang berkunjung di Ternate, ataupun bagi sebagian orang Ternate apabila bepergian keluar Ternate biasanya Bagea Kenari dijadikan sebagai ole-ole. Bagea kenari ini memiliki ciri dan bentuk yang khas dengan ketebalannya bervariasi serta memiliki warna coklat keabu-abuan. Kue Bagea Kenari ini memiliki nilai jual yang sangat menjanjikan bagi para pengusaha Bagea Kenari di daerah ini, apabila kualitasnya mampu dipertahankan maka nilai jual Bagea Kenari akan sangat stabil. Yang sangat menarik untuk diteliti adalah proses pengeringan/pemanasan Bagea Kenari yang masih dipertahankan secara turun-temurun. Proses pengeringan/pemanasan ini apabila dimanajemen/dikelola dengan tepat maka akan mendapatkan kualitas Bagea Kenari yang baik dengan nilai ekonomisnya cukup tinggi.

Proses pengeringan/pemanasan dengan terkontrolnya suhu panas secara merata sampai kepusat Bagea Kenari, proses ini akan menurunkan kadar air dalam bagea kenari, juga dapat mencegah terjadinya proses pembusukan oleh mikroorganisme. Proses pengeringan/pemanasan dengan suhu tinggi secara matematika sangat menarik untuk diteliti, hal ini disebabkan karena proses pemanasan dapat dimodelkan ke dalam persamaan diferensial parsial yaitu persamaan panas dengan syarat awal dan syarat batas.

Dalam proses pengeringan/pemanasan bagea kenari yang berbentuk Tabung, suhu yang diberikan harus seefektif mungkin. Pengaturan suhu dan lamanya pemanasan diperhatikan untuk mencapai kondisi ideal, kondisi dimana Bagea Kenari terbebas dari mikroorganisme perusak dan kandungan zat yang terkandung dalam Bagea Kenari tidak banyak berkurang serta ukuran Bagea Kenari tidak banyak berubah.

## **KAJIAN TEORI**

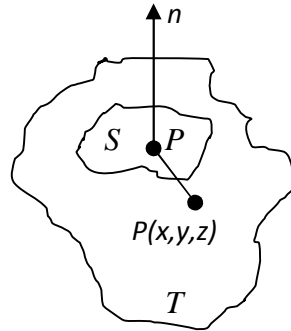
### **Penurunan Persamaan Panas**

Pada suatu benda, panas akan mengalir dari daerah yang suhunya lebih tinggi menuju ke daerah dengan suhu yang lebih rendah. Eksperimen menunjukkan bahwa laju aliran

panas proporsional terhadap gradien suhu. Semakin besar gradien suhu, yaitu beda panas antara dua titik, maka semakin besar pula laju aliran panasnya. Misalkan  $v$  kecepatan aliran panas maka

$$v = -K \text{ grad } U \quad (2.1)$$

dengan  $U(x, y, z, t)$  adalah suhu pada titik  $P(x, y, z)$ ,  $t$  adalah waktu dan  $K$  adalah konstanta konduktivitas termal dari benda.



Gambar 1. Panas yang mengalir melalui permukaan bahan

Misalkan  $T$  adalah suatu daerah pada benda dan  $\partial S$  adalah batas dari daerah tersebut (gambar 1). Jumlah panas yang meninggalkan  $T$  tiap satuan waktu adalah

$$\iint_{\partial S} v \cdot n \, dA \quad (2.2)$$

dengan  $v \cdot n$  adalah komponen dari  $v$  pada arah vector normal terluar  $n$  dari  $S$ . Berdasarkan teorema divergensi Gauss, maka kita punyai

$$\iint_{\partial S} v \cdot n \, dA = -K \iiint_T \text{div} (\text{grad } U) \, dx \, dy \, dz = -K \iiint_T \nabla^2 U \, dx \, dy \, dz \quad (2.3)$$

dengan  $\nabla^2 = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}$  adalah operator Laplace dari  $U$ .

Disisi lain, jumlah total panas  $H$  pada daerah  $T$  adalah

$$H = \iiint_T \sigma \rho U \, dx \, dy \, dz \quad (2.4)$$

dengan  $\sigma$  adalah konstanta panas spesifik bahan dan  $\rho$  adalah massa jenis bahan.

Sehingga laju penurunan  $H$  terhadap waktu adalah

$$-\frac{\partial H}{\partial t} = -\iiint_T \sigma \rho \frac{\partial U}{\partial t} \, dx \, dy \, dz \quad (2.5)$$

dan ini harus sama dengan jumlah panas yang meninggalkan  $T$ , sehingga

$$-\iiint_T \sigma \rho \frac{\partial U}{\partial t} \, dx \, dy \, dz = -K \iiint_T \nabla^2 U \, dx \, dy \, dz \quad (2.6)$$

$$\text{atau} \quad \iiint_T \left( \sigma \rho \frac{\partial U}{\partial t} - K \nabla^2 U \right) dx dy dz = 0 \quad (2.7)$$

Karena persamaan (2.7) dipenuhi untuk sebarang daerah T dan kita hanya memperhatikan fungsi integran yang kontinu, maka integrannya harus bernilai nol dimanapun, sehingga diperoleh bentuk persamaan panas berikut

$$\frac{\partial U}{\partial t} = c^2 \nabla^2 U, \text{ dengan } c^2 = \frac{K}{\sigma \rho} \quad (2.8)$$

dimana  $c^2$  disebut sebagai difusivitas termal bahan atau kemampuan bahan menghantarkan panas (Kreyszig, 1994).

**Persamaan Panas bentuk Standar**

Untuk menganalisa distribusi suhu panas pada Bagea Kenari, kita akan menerapkan persamaan (2.8) dengan terlebih dahulu memasukkan nilai-nilai  $c^2$  untuk jenis Bagea Kenari tersebut. Dalam penelitian ini kita tidak akan melakukan hal yang demikian, kita cukup menjelaskan salah satu bentuk khusus persamaan panas yang disebut bentuk standar. Namun untuk nilai  $c^2$  yang berbeda, kita dapat menganalisa dengan menggunakan suatu transformasi. Bentuk satandar dari model perambatan panas pada tiga dimensi dari suatu bahan yang ukuran panjang, lebar, dan tinggi berturut-turut yakni a, b, dan c adalah

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}, \quad 0 \leq x < a, 0 \leq y < b, 0 \leq z < c, 0 < t < \infty \quad (2.9)$$

**Solusi Analitik**

Salah satu tehnik menyelesaikan persamaan diferensial parsial dengan syarat awal dan syarat batas secara analitik adalah tehnik pemisahan variabel. Tehnik ini diterapkan untuk masalah-masalah dimana

- i. Persamaan diferensial parsialnya (PDP) berbentuk linear dan homogen
- ii. Syarat batasnya adalah berbentuk

$$\begin{aligned} \alpha u_x(0, t) + \beta u(0, t) &= 0 \\ \gamma u_x(a, t) + \delta u(a, t) &= 0 \end{aligned}$$

dengan  $\alpha, \beta, \gamma$  dan  $\delta$  adalah konstanta dan  $0 < x < a$

Tehnik pemisahan variabel yaitu mencari solusi sederhana dari PDP bernetuk

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (2.10)$$

dengan  $X(x)$  adalah fungsi dari x dan  $T(t)$  adalah fungsi terhadap t.

Secara umum tehnik ini memungkinkan untuk mencari sebanyak tak hingga solusi-solusi dari PDP (yang juga memenuhi syarat batas). Fungsi-fungsi sederhana dari  $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$  disebut sebagai solusi utama. Sedangkan solusi yang akan dicari ditentukan dengan menjumlahkan solusi-solusi utama tadi. Seperti halnya tiap-tiap solusi utama memenuhi syarat batas, hasil penjumlahan

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x)T_n(t) \tag{2.11}$$

juga harus memenuhi syarat awal. Dengan demikian jika penjumlahan ini memenuhi syarat batas dan syarat awal maka kita memperoleh solusi dari masalah yang dihadapi.

### Solusi Numerik

#### Pendekatan Beda Hingga

Perhatikan deret Taylor berikut ini. Semua fungsi analitik dapat dituliskan dalam bentuk deret polynomial yang dikenal dengan deret Taylor yakni ;

$$f(z) = f(z_0) + \frac{z-z_0}{1!} f'(z_0) + \frac{(z-z_0)^2}{2!} f''(z_0) + \dots + \frac{(z-z_0)^n}{n!} f^n(z_0) + R_n(z) \tag{2.12}$$

Dengan menggunakan deret tersebut dan memisalkan  $|z - z_0| = \Delta z$  sangat kecil yang artinya nilai-nilai dari  $z$  berada dalam suatu persekitaran dengan  $z_0$  maka diperoleh bentuk berikut

$$f(z_0 + \Delta z) = f(z_0) + \Delta z f'(z_0) + \frac{\Delta z^2}{2!} f''(z_0) + \dots + \frac{\Delta z^n}{n!} f^n(z_0) + R_n(z_0 + \Delta z) \tag{2.13}$$

Berdasarkan persamaan (2.13) diperoleh suatu pendekatan untuk turunan pertama dengan cara pemotongan, yaitu

$$f'(z_0) \approx \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \tag{2.14}$$

Dengan mengambil nilai  $\Delta z$  yang negatif  $-\Delta z$  diperoleh bentuk beda mundur

$$f'(z_0) \approx \frac{f(z_0) - f(z_0 - \Delta z)}{\Delta z} \tag{2.15}$$

Jika persamaan (2.14) dan (2.15) diterapkan sekali lagi maka didapatkan bentuk pendekatan untuk turunan kedua, yaitu

$$f''(z_0) \approx \frac{f(z_0 + \Delta z) - 2f(z_0) + f(z_0 - \Delta z)}{(\Delta z)^2} \tag{2.16}$$

Selanjutnya kita akan memperluas pendekatan beda hingga untuk turunan parsial. Pada dua variabel diperoleh perluasan deret Taylor berikut :

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x, y) &= u(x, y) + u_x(x, y)\Delta x + \frac{1}{2!}u_{xx}(x, y)(\Delta x)^2 + \dots, \\ u(x - \Delta x, y) &= u(x, y) - u_x(x, y)\Delta x + \frac{1}{2!}u_{xx}(x, y)(\Delta x)^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.17)$$

Berdasarkan persamaan (2.17) diperoleh

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &\cong \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} \\ u_{xx}(x, y) &\cong \frac{1}{(\Delta x)^2} [u(x + \Delta x, y) - 2u(x, y) + u(x - \Delta x, y)], \\ u_y(x, y) &\cong \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y}, \\ u_{yy}(x, y) &\cong \frac{1}{(\Delta y)^2} [u(x, y + \Delta y) - 2u(x, y) + u(x, y - \Delta y)], \end{aligned} \quad (2.18)$$

(Farlow, 1982).

### Metode Beda Hingga Pada Persamaan Panas

Misalkan bentuk standar dari persamaan panas satu dimensi dengan syarat batas Dirichlet diberikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} && ; t > 0, 0 < x < 1 \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0 && ; t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) && ; 0 < x < 1 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Untuk mendekati persamaan (2.19) dengan menggunakan metode beda hingga, kita membagi domain  $[0, 1] \times [0, t_F]$  dengan garis-garis pada sumbu  $x$  dan  $t$  membentuk kisi-kisi (grid). Garis-garis tersebut membentuk persegi panjang dengan sisi-sisi  $\Delta x$  dan  $\Delta t$  serta titik-titik potong (titik grid)

$$(x_j = j\Delta x, t_n = n\Delta t), \quad j = 0, 1, \dots, j, \quad n = 0, 1, \dots, N$$

sebagai titik-titik sudut persegi panjang tersebut, dengan  $\Delta x = \frac{1}{J}$ .

Selanjutnya akan dicari pendekatan dari solusi persamaan (2.19) tersebut pada titik-titik grid ini. Nilai pendekatan akan dinotasikan sebagai

$$U_j^n \approx u(x_j, t_n) \quad (2.20)$$

Dengan menggunakan metode Euler, pendekatan turunan pertama terhadap  $t$  dari persamaan (2.20) adalah

$$\frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) \quad (2.21)$$

Pendekatan turunan pertama terhadap  $x$  persamaan (2.21) adalah

$$\frac{u(x_{j+1}, t_n) - u(x_j, t_n)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_n) \quad (2.22)$$

Sedangkan pendekatan turunan kedua terhadap  $x$  yakni

$$\begin{aligned} u_{xx}(x_j, t_n) &= (u_x)_x(x_j, t_n) \approx \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u(x_{j+1}, t_n) - u(x_j, t_n)}{\Delta x} \right) \\ &= \frac{1}{\Delta x} (u_x(x_{j+1}, t_n) - u_x(x_j, t_n)) \\ &\approx \frac{1}{\Delta x} \left( \frac{u(x_{j+1}, t_n) - u(x_j, t_n)}{\Delta x} - \frac{u(x_j, t_n) - u(x_{j-1}, t_n)}{\Delta x} \right) \\ u_{xx}(x_j, t_n) &= \frac{u(x_{j+1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_{j-1}, t_n)}{(\Delta x)^2} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Jika persamaan (2.21) dan (2.23) disubstitusikan ke dalam persamaan (2.19) diperoleh

$$\frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)}{\Delta t} = \frac{u(x_{j+1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_{j-1}, t_n)}{(\Delta x)^2}$$

yang secara eksplisit terhadap  $U_j^{n+1}$ , persamaan ini mempunyai bentuk

$$U_j^{n+1} = U_j^n + v(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) \quad (2.24)$$

dengan  $v = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$

Perhatikan bahwa untuk menghitung  $U_j^{n+1}$  diperlukan  $U_{j-1}^n$ ,  $U_j^n$  dan  $U_{j+1}^n$ .

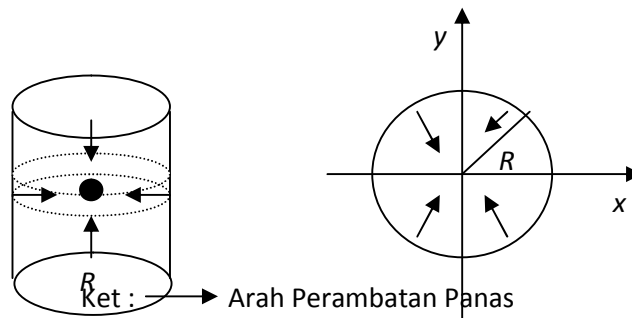
## METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur, yakni mengumpulkan beberapa referensi yang mendukung tujuan penelitian ini kemudian dianalisis dan dikaji untuk mendapatkan pemodelan matematika.

## PEMBAHASAN

### Model Operator Laplace dalam Koordinat Kutub dan tabung

Pada penelitian ini, penulis akan menjelaskan perilaku panas yang terjadi pada proses pengeringan bagea ternate. Karena bagea ternate berbentuk tabung maka koordinat tabung adalah sangat tepat. Perambatan panas pada pusat bagea akan lebih cepat jika jarak antara sisi yang bersentuhan dengan panas terhadap pusat begea semakin kecil. Apabila bagea memiliki ukuran tinggi yang jauh lebih besar dibandingkan diameter lingkaran alasnya, maka penganalisaan kita cukup pada penampang melingkar bagea tersebut. Dengan kata lain perambatan panas sepanjang tinggi bagea diabaikan. Seperti gambar berikut :



Hubungan antara koordinat kartesius dengan koordinat kutub disajikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned} \quad (4.1)$$

Apabila transformasi di atas diturunkan secara parsial maka diperoleh sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \cos \theta, & \frac{\partial y}{\partial r} &= \sin \theta, \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} &= -r \sin \theta, & \frac{\partial y}{\partial \theta} &= r \cos \theta \end{aligned}$$

Jika  $u$  suatu fungsi yang terdiferensial dua kali pada  $x$  dan  $y$ , maka sesuai dengan aturan rantai diperoleh :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta \quad (4.2)$$

Selanjutnya diturunkan lagi terhadap  $r$  maka

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cos \theta + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \sin \theta$$



karena hasil  $\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)$  dan  $\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)$  dapat diperoleh dari persamaan (4.2) dengan

mensubstitusi  $\frac{\partial u}{\partial x}$  atau  $u_x$  menggantikan  $u$ . Sehingga diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial u_x}{\partial r} = u_{xx} \cos \theta + u_{xy} \sin \theta$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial u_y}{\partial r} = u_{yx} \cos \theta + u_{yy} \sin \theta$$

Karena sifat kekontinuan dari fungsi, maka  $u_{yx} = u_{xy}$ , akibatnya

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = (u_{xx} \cos \theta + u_{xy} \sin \theta)(u_{yx} \cos \theta + u_{yy} \sin \theta)$$

$$= u_{xx} \cos^2 \theta + 2u_{xy} \sin \theta \cos \theta + u_{yy} \sin^2 \theta$$

dengan cara yang sama diperoleh

$$\frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) = u_{xx} \sin^2 \theta - 2u_{xy} \sin \theta \cos \theta + u_{yy} \cos^2 \theta - \frac{1}{r} u_x \cos \theta - \frac{1}{r} u_y \sin \theta$$

dan karena  $\frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{r} u_x \cos \theta + \frac{1}{r} u_y \sin \theta$ , maka diperoleh

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \tag{4.3}$$

Untuk menentukan operator Laplace pada Koordinat Tabung, perhatikan hubungan antara Koordinat Kutub dan Koordinat Tabung yaitu dengan menambah suatu transformasi  $z = z$ , sehingga diperoleh tiga bentuk transformasi pada ketiga sumbu  $x, y$  dan  $z$  sebagai berikut :

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = z$$

dengan demikian diperoleh  $\nabla^2 u$  dengan menambah  $u_{zz}$  pada persamaan (4.3) yakni :

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{4.4}$$

### Persamaan Panas Pada Koordinat Kutub dan Tabung

Berdasarkan hasil persamaan (4.3), dengan demikian persamaan panas

$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \nabla^2 u$  dalam bentuk koordinat kutub adalah

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \nabla^2 u = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \quad (4.5)$$

Karena sifatnya yang simetris dan bila pada batas lingkaran diberi suhu yang sama, maka distribusi suhu tidak bergantung pada  $\theta$ . Sehingga persamaan panas tereduksi menjadi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (4.6)$$

dengan syarat awal dan syarat batas sebagai berikut :

$$u(R, t) = u(t) \quad \text{untuk semua } t \geq 0$$

$$u(r, 0) = u_0(r) \quad 0 \leq r < R$$

### Persamaan Panas Pada Koordinat Tabung

Berdasarkan hasil (4.4), maka persamaan panas pada koordinat tabung menjadi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (4.7)$$

dengan  $\Omega = \left\{ (r, z) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq r \leq R \text{ dan } |z| \leq \frac{L}{2} \right\}$  dimana  $R$  adalah jari-jari Bagea berbentuk tabung dan  $\frac{L}{2}$  adalah tinggi Bagea. Selanjutnya perhatikan syarat batas dan syarat awal sebagai berikut :

$$\begin{aligned} u(r, z, 0) &= u_0(r, z), & 0 \leq r \leq R, |z| &= \frac{L}{2}, \\ u(R, z, t) &= u(t), & |z| &= \frac{L}{2}, t > 0, \\ u(r, -\frac{L}{2}, t) &= u(t), & 0 \leq r \leq R, t > 0, \\ u(r, \frac{L}{2}, t) &= u(t), & 0 \leq r \leq R, t > 0, \end{aligned} \quad (4.8)$$

dari syarat awal dan syarat batas yang diberikan tampak bahwa distribusi suhu di titik pusat tabung untuk setiap waktu  $t$  dilambangkan dengan  $u(0,0,t)$ , artinya secara geometri titik dimaksud berada pada titik asal sumbu koordinat. Sejauh mana perilaku panas pada titik pusat tabung ini yang merupakan fokus atau tujuan dari penelitian ini.

Meskipun demikian, kita tidak mengabaikan perilaku panas yang terjadi pada titik-titik lain.

Berikut ini akan diperkenalkan bentuk standar dari persamaan panas pada koordinat kutub dan tabung yakni

$$u_t = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r \tag{4.9}$$

sedangkan pada koordinat tabung adalah

$$u_t = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + u_{zz} \tag{4.10}$$

pada persamaan (4.9) dan (4.10), faktor  $c^2$  dianggap bernilai satu. Bentuk satandar ini memiliki kelebihan yakni dengan menyelesaikan bentuk ini, sekaligus dapat menjelaskan persamaan (4.6) dan (4.7) untuk nilai  $c^2$  yang berbeda. Hal ini dapat terlaksana dengan menggunakan suatu transformasi.

### Solusi Persamaan Panas pada Koordinat Tabung

#### Solusi Analitik

Model persamaan panas bentuk standar pada koordinat tabung adalah

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{4.11}$$

Jika diseluruh permukaan tabung diberikan suhu yang sama pada permukaan, maka diperoleh syarat awal dan syarat batas

$$\begin{aligned} u(r, z, 0) - u_o(r, z) &= 0, & 0 \leq r \leq R, \quad |z| = \frac{L}{2}, \\ u(R, z, t) &= u(t), & |z| = \frac{L}{2}, \\ u(r, -\frac{L}{2}, t) &= u(t), & 0 \leq r \leq R, \\ u(r, \frac{L}{2}, t) - u(t) &= 0, & 0 \leq r \leq R, \end{aligned} \tag{4.12}$$

Secara analitik masalah ini belum bisa diselesaikan dengan menggunakan tehnik pemisahan variabel, karena syarat batas tak homogen membuat masalah tersebut sukar untuk diselesaikan. Namun bisa dilakukan dengan menggunakan transformasi yang mengubah masalah di atas menjadi masalah dengan syarat batas homogen.

Dengan mengasumsikan bahwa untuk  $t \rightarrow \infty$  distribusi suhu keadaan tak steady di atas menjadi distribusi suhu keadaan steady. Dengan kata lain bahwa distribusi suhu tersebut adalah penjumlahan dari

$$u(r, z, t) = v(r, z) + w(r, z, t) \tag{4.13}$$

dengan  $v(r, z)$  adalah solusi akhir untuk waktu yang tak hingga dan dinyatakan sebagai

$$v(r, z) = \lim_{t \rightarrow \infty} v(r, z, t) \quad (4.14)$$

sedangkan  $w(r, z, t)$  adalah bagian dari solusi bergantung pada syarat awal dan pada akhirnya menuju nol.

Dari distribusi  $v(r, z)$  yang steady diperoleh

$$v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + v_{zz} = 0 \quad (4.15)$$

dengan syarat batas berikut

$$\begin{aligned} u(R, z) &= u(t), \\ u(r, -\frac{L}{2}) &= u(t), \\ u(r, \frac{L}{2}) &= u(t). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Untuk mencari solusi dari masalah PDP homogen di atas digunakan teknik pemisahan variabel, misalkan solusinya berupa

$$v(r, z) = R(r)Z(z) \quad (4.17)$$

dengan  $R(r)$  adalah fungsi  $r$  dan  $Z(z)$  adalah fungsi  $z$ . Dengan mensubstitusi persamaan (4.16) ke persamaan (4.17) dan kemudian kedua ruas dibagi dengan  $R$  dan  $Z$  sehingga

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{Rr} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} &= 0 \text{ atau} \\ \frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{Rr} \frac{dR}{dr} &= -\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} \end{aligned} \quad (4.18)$$

ruas kiri merupakan fungsi terhadap  $R$ , sementara ruas kanan merupakan fungsi terhadap  $Z$ . Untuk memenuhi persamaan (4.18), maka penjumlahan ruas kiri maupun ruas kanan harus konstan misalkan  $-q^2$  ( $q > 0$ ), sehingga diperoleh

$$-\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -q^2 \quad (4.19)$$

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{Rr} \frac{dR}{dr} = -q^2 \quad (4.20)$$

persamaan (4.20) ekuivalen dengan

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + q^2 R = 0 \quad (4.21)$$

yang mana solusinya adalah fungsi Bessel jenis pertama ( $J_0$ ) dan jenis kedua ( $Y_0$ ). Karena  $Y_0$  tidak terdefinisikan pada  $r = 0$ , maka solusinya adalah

$R(r) = A_q J_0(qr)$  dimana  $J_0(qr) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (qr/2)^{2r}}{r! \Gamma(r+1)}$  dengan  $A_q$  suatu konstanta yang

bergantung pada nilai  $q$ . Konstanta ini dapat dicari berdasarkan kenyataan bahwa fungsi Bessel memiliki sifat keortogonalan.

Dengan cara yang sama, ruas kanan dari persamaan (4.18) dapat dipisah menjadi

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - q^2 Z = 0$$

dengan solusi sebagai berikut ::

$$\text{Misalkan } s^2 = \frac{d^2 R}{dr^2}$$

$$s^2 - q^2 = 0$$

$$s^2 = q^2$$

$$s = \pm \sqrt{q^2}$$

$$s = \pm q$$

$$R(r) = B_q \ell^{qr} + C_q \ell^{-qr}$$

Dengan cara yang sama,

$$-\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -q^2$$

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} - q^2 = 0$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - Zq^2 = 0$$

solusinya adalah

$$Z(z) = B_q \ell^{qz} + C_q \ell^{-qz}$$

dengan demikian solusi umum dari persamaan (4.18) adalah

$$u(r, z) = \sum_{q=0}^{\infty} A_q J_0(qr) \left( B_q \ell^{qz} + C_q \ell^{-qz} \right) \tag{4.22}$$

Berdasarkan tiga syarat batas yang diberikan diperoleh  $q = 0$ . sehingga solusi berupa fungsi konstan. Oleh karena itu syarat batas menyatakan bahwa untuk setiap nilai  $r$  dan  $z$  distribusi suhu akan tetap maka

$$u(r, z) = u(t) \tag{4.23}$$

Beralih pada distribusi transien diperoleh

$$w_t = w_{rr} + \frac{1}{r} w_r + w_{zz} - u_t(t) \quad (4.24)$$

dengan syarat awal dan syarat batas berupa

$$\begin{aligned} w(R, z, t) &= 0 \\ w(r, -\frac{L}{2}, t) &= 0 \\ w(r, \frac{L}{2}, t) &= 0 \\ w(r, z, 0) &= u_o(r, t) - u(t) \end{aligned}$$

Menurut teori system dimensi takhingga, misalkan  $a(t)$  adalah kondisi saat waktu  $t$ ,  $a(t) = v(r, z, t)$  maka  $a(t)$  memenuhi persamaan diferensial

$$\frac{\partial a(t)}{\partial t} = Aa(t) + B \frac{du(t)}{dt}, \quad a(0) = a_o \quad (4.26)$$

dimana  $Aa = \left[ \frac{\partial^2 a}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial a}{\partial r} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} \right]$  dan  $B \frac{du}{dt} = -1 \cdot \frac{du}{dt}$ , disini 1 didefinisikan sebagai

fungsi pada  $L^2(\Omega)$  (himpunan semua fungsi yang terukur dan terintegral lipat dua di domain  $\Omega$ ) dari  $(r, z) \rightarrow 1$ , dan solusinya adalah

$$a(t) = T(t)a - \int_0^t T(t-\tau) \cdot \frac{du(\tau)}{dt} d\tau \quad (4.27)$$

dimana

$$T(t)a = \lim_{N, M \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \langle a, \phi_{n,m} \rangle T(t) \phi_{n,m} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \langle a, \phi_{n,m} \rangle \phi_{n,m} \exp(\lambda_{n,m} t)$$

sehingga solusi dari  $u$  diberikan sebagai berikut :

$$u(r, z, t) = u(t) + T(t)u_o - T(t) \cdot 1 \cdot u(0) - \int_0^t T(t-\tau) 1 \cdot \frac{du(\tau)}{dt} d\tau \quad (4.28)$$

apabila disubstitusi  $u_o = 0$  dan  $u(t) = 1$  maka dari persamaan (4.28) didapat

$$\begin{aligned} u(r, z, t) &= 1 - (T(t) \cdot 1)(r, z) \\ &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \langle 1, \phi_{n,m} \rangle \phi_{n,m} \exp(\lambda_{n,m} t) \\ &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^R r \frac{2}{\sqrt{L} R J_1(\lambda_m R)} \cos\left((2n+1)\pi \frac{z}{L}\right) J_0(\lambda_m r) dz dr \end{aligned}$$

$$\frac{2}{\sqrt{L} R J_1(\lambda_m R)} \cos\left((2n+1)\pi \frac{z}{L}\right) J_0(\lambda_m r) \exp\left(\left(\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{L^2} + \lambda_m^2\right) t\right)$$

$$= 1 - \frac{8}{\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(\left(\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{L^2} + \lambda_m^2\right) t\right) \frac{(-1)^n}{\lambda_m J_1(\lambda_m R) (2n+1)} \cos\left((2n+1)\pi \frac{z}{L}\right) J_0(\lambda_m r)$$

Untuk pusat tabung diberikan oleh

$$y(t) - u(0,0,t) = 1 - \frac{8}{\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(\left(\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{L^2} + \lambda_m^2\right) t\right) \frac{(-1)^n}{\lambda_m J_1(\lambda_m R) (2n+1)} .$$

### Metode Beda Hingga Untuk Koordinat Tabung

Proses pada metode beda hingga pada koordinat tabung tidak jauh berbeda pada koordinat kartesius, maka untuk operator Laplace pada koordinat tabung secara aproksimasinya adalah

$$\frac{\partial u}{\partial r} \approx \frac{u(r + \Delta r, z, t) - u(r, z, t)}{\Delta r}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \approx \frac{u(r + \Delta r, z, t) - 2u(r, z, t) + u(r - \Delta r, z, t)}{(\Delta r)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u(r, z, t + \Delta t) - u(r, z, t)}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \approx \frac{u(r, z + \Delta z, t) - 2u(r, z, t) + u(r, z - \Delta z, t)}{(\Delta z)^2}$$

selanjutnya kita buat garis-garis parallel pada sumbu  $r, z$  dan  $t$  dengan membentuk spasi  $\Delta r, \Delta z$  dan  $\Delta t$  serta titik-titik potong  $(r_j = j\Delta r, z_m = m\Delta z, t_n = n\Delta t)$  dengan  $j = 0, 1, \dots, k = 0, 1, \dots, n = 0, 1, \dots$

dengan demikian skema eksplisit metode beda hingganya menjadi

$$u(r, z, t + \Delta t) = u(r, z, t) + v_1(u(r + \Delta r, z, t) - 2u(r, z, t) + u(r - \Delta r, z, t))$$

$$+ \frac{1}{n}(u(r + \Delta r, z, t) - u(r, z, t)) + v_2(u(r, z + \Delta z, t) - 2u(r, z, t) + u(r, z - \Delta z, t))$$

$$+ \frac{1}{n}(u(r, z + \Delta z, t) - u(r, z, t)) \quad (4.29)$$

dengan  $v_1 = \frac{\Delta t}{(\Delta r)^2}$  dan  $v_2 = \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2}$

dari (4.29) diperoleh bentuk khususnya sebagai berikut :

$$u(r, z, t + \Delta t) = u(r, z, t) + v_1(u(r + \Delta r, z, t) - 2u(r, z, t) + u(r - \Delta r, z, t)) + \frac{1}{n}(u(r + \Delta r, z, t) - u(r, z, t)) \quad (4.30)$$

persamaan (4.30) menyatakan bahwa perambatan panas sepanjang tinggi tabung diabaikan. Meski kenyataannya tidak sesederhana demikian, namun secara grafis keduanya akan memiliki bentuk kurva skema eksplisit yang identik. Hanya saja faktor  $z$  pada persamaan (4.30) dapat mempercepat rambatan suhu di dalam tabung.

Kita perhatikan pula syarat awal dan syarat batas berikut

$$u(r, 0) = 0, \quad 0 \leq r \leq 1$$
$$u(1, 0) = 0, \quad 0 \leq t < \infty$$

Kendala utama dari syarat batas untuk model ini adalah kita tidak mempunyai data awal mengenai suhu pada batas  $r = 0$  untuk setiap waktunya. Berbeda dengan model koordinat kartesius dimana suhu batas diberikan untuk nilai  $x \rightarrow 0$ . Agar proses iterasi dari skema eksplisit dapat berjalan maka penentuan suhu pada titik tersebut didekati dengan

$$u(r_0, t_{n+1}) = 2u(r_1, t_{n+1}) - u(r_2, t_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots$$

## KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan dan teori-teori pendukung yang diuraikan sebelumnya, maka dapat disimpulkan sebagai berikut :

1. Perilaku perambatan panas pada bagea kenari dapat dimodelkan berdasarkan pendekatan melalui koordinat tabung.
2. Proses pemanasan pada sterilisasi bagea kenari akan berakibat pada penentuan kualitas hasil pengeringan bagea kenari dengan cita rasa yang sangat gurih .
3. Perambatan panas yang dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial parsial dengan syarat awal dan syarat batas. Syarat awal dan syarat batas ini menggambarkan keadaan suhu sebelum proses pemanasan dilakukan.
4. Dengan menyelesaikan model persamaan panas, perilaku panas yang terjadi disetiap titik dalam pada bagea kenari yang berbentuk tabung dapat diprediksi.

## DAFTAR PUSTAKA

Boas, M.,L., (1983). *Mathematical Method in the Physical Science*, John Wiley & Sons, Canada.



Farlow, S.,J., (1982). *Partial Differential Equations for Scientist and Engineers*, John Wiley & Sons, Canada.

Holman, J.P., (1991). *Perpindahan Kalor, terjemahan: Jasifi, E., Jakarta : Erlangga*

Kreyszig, E., (1994). *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley & Sons, Singapore.

Morton, K,W & Mayers, D.F. (1996). *Numerical Solution Of Partial Differential Equation*. Cambrige University Press, Cambridge.

N. Piskonov. (1981).*Differential and Integral Calculus Vol II*. Mir Publishers, Moskow

Purcell, Edwin J & Varberg, Dale., (1994). *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 1 dan 2*, Terjemahan: I Nyoman Susila, Kartasasmita Bana, Jakarta : Erlangga.

